Jacek Gruszka
Lech Kaczmarek

Elementy matematyki wyższej

WYŻSZA SZKOŁA KOMUNIKACJI I ZARZĄDZANIA
właściwy kierunek

Wydawnictwo Wyższej Szkoły
Komunikacji i Zarządzania
w Poznaniu

Jacek Gruszka
Lech Kaczmarek

Elementy matematyki wyższej

Wydawnictwo Wyższej Szkoły Komunikacji i Zarządzania
Poznań 2004

Autorzy:
dr Jacek Gruszka, dr Lech Kaczmarek

Recenzent:
prof. dr hab. Ryszard Płuciennik

Korekta:
Aleksandra Springer

Opracowanie redakcyjne:
Robert Leśków

Projekt okładki:
Jan Ślusarski

Kopiowanie i powielanie w jakiejkolwiek formie
wymaga pisemnej zgody Wydawcy

©Copyright by Wydawnictwo Wyższej Szkoły Komunikacji i Zarządzania – Poznań 2004

ISBN 83-88018-24-8

Wydawnictwo Wyższej Szkoły Komunikacji i Zarządzania
61-577 Poznań, ul. Różana 17a, (061) 8345 914, fax 8345 912
www.wskiz.poznan.pl
e-mail: wydawnictwo@wskiz.poznan.pl

Poznań 2004

Spis treści

Wstęp ... 7

1. Logika i teoria mnogości ... 11

1.1. Logika matematyczna ... 11

1.1.1. Rachunek zdań ... 11
1.1.2. Formalne kryteria poprawności wnioskowań. Reguły wnioskowania ... 20
1.1.3. Rachunek funkcyjny (kwantyfikatorowy) ... 26

1.2. Elementy teorii mnogości ... 29

1.2.1. Działania na zbiorach ... 29
1.2.2. Iloczyn kartezjański zbiorów ... 31
1.2.3. Pojęcie relacji ... 32
1.2.4. Rodzaje relacji ... 33
1.2.5. Przegląd najważniejszych relacji ... 35

2. Rachunek macierzowy ... 41

2.1. Macierze ... 41

2.1.1. Określenie macierzy. Działania na macierzach ... 41
2.1.2. Macierz odwrotna ... 47
2.1.3. Rozwiązywanie elementarnych równań macierzowych ... 54
2.1.4. Zastosowanie rachunku macierzowego ... 57

2.2. Wyznaczniki ... 62

2.2.1. Wyznacznik macierzy kwadratowej i jego własności ... 62
2.2.2. Minor macierzy. Dopełnienie algebraiczne ... 63
2.2.3. Rozwinięcie Laplace'a ... 64
2.2.4. Osobliwość i nieosobliwość macierzy. Rząd macierzy ... 67

2.3. Układy równań liniowych ... 70

2.3.1. Układ Cramera. Wzory Cramera ... 70
2.3.2. Macierz uzupełniona układu równań. Twierdzenie Kroneckera-Capellego Liczba rozwiązań układu równań liniowych ... 71
2.3.3. Rozwiązywanie układu równań liniowych metodą eliminacji Gaussa ... 73

2.4. Rachunek wektorowy ... 79

3. Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej ... 91

3.1. Przypomnienie wiadomości o funkcjach ... 91

3.2. Przegląd funkcji rzeczywistych ... 94

3.2.1. Funkcje wielomianowe ... 94
3.2.2. Funkcja wykładnicza ... 94
3.2.3. Funkcja logarytmiczna ... 95
3.2.4. Funkcje trygonometryczne ... 96
3.2.5. Funkcje kołowe (cyklometryczne) ... 103
3.2.6. Uwagi o przekształcaniu wykresu funkcji ... 104

3.3. Granica i ciągłość funkcji ... 108

3.4. Pochodna funkcji ... 111

3.5. Pochodna jako funkcja ... 115

3.5.1. Pochodna funkcji złożonej ... 118
3.5.2. Obliczanie pochodnych funkcji postaci $f(x)^{g(x)}$ ... 121

3.6. Podstawowe twierdzenia dotyczące rachunku różniczkowego funkcji jednej zmiennej ... 123

3.6.1. Twierdzenia o wartości średniej ... 123
3.6.2. Reguła de l'Hospitala ... 126

3.7. Niektóre zastosowania pochodnej ... 130

3.8. Asymptoty wykresu funkcji ... 131

3.9. Monotoniczność funkcji ... 133

3.10. Ekstremum funkcji ... 137

3.11. Badanie funkcji ... 142

3.12. Wartość największa i wartość najmniejsza funkcji ciągłej ... 150

4. Całki ... 155

4.1. Całka nieoznaczona ... 155

4.1.1. Określenie i podstawowe własności całki nieoznaczonej ... 155
4.1.2. Podstawowe metody całkowania ... 156
4.1.3. Całkowanie funkcji wymiernych. Rozkład na ułamki proste ... 162
4.1.4. Całkowanie funkcji niewymiernych. Podstawienia Eulera ... 164
4.1.5. Całkowanie funkcji zawierających wyrażenia trygonometryczne ... 166

4.2. Całka oznaczona ... 168
4.3. Całka Riemanna ... 170

5. Funkcje wielu zmiennych ... 175
5.1. Pojęcia podstawowe ... 175
5.2. Granica funkcji dwóch zmiennych ... 176
5.3. Pochodne cząstkowe funkcji dwóch zmiennych ... 177
5.4. Pochodne cząstkowe wyższych rzędów ... 180
5.5. Pochodne cząstkowe w punkcie ... 183
5.6. Różniczka zupełna ... 186
5.7. Zastosowanie różniczki zupełnej ... 188
5.8. Ekstremum funkcji dwóch zmiennych ... 204

6. Szeregi ... 213
6.1. Szeregi liczbowe ... 213
6.1.1. Wiadomości podstawowe ... 213
6.1.2. Określenie szeregu liczbowego i jego sumy oraz zbieżność i rozbieżność szeregu ... 216
6.1.3. Szeregi liczbowe o wyrazach dodatnich ... 218
6.1.4. Szeregi liczbowe naprzemienne ... 225
6.2. Szeregi potęgowe ... 230
6.3 Szereg Taylora ... 233
6.4. Rozwijanie w szereg Maclaurina pewnych typów funkcji wymiernych ... 239
6.5. Zastosowanie szeregów Taylora w aproksymacji ... 247

Bibliografia ... 253

Wstęp

Książka „Elementy matematyki wyższej” jest podręcznikiem, a więc zawiera materiał, który należy opanować i (zazwyczaj) zdać z niego egzamin. Adresatami podręcznika są przede wszystkim studenci wyższych szkół ekonomicznych i technicznych.

Przedmiot, którym się zajmujemy, to matematyka, postrzegana przez większość jako rzecz trudna i skomplikowana a przez mniejszość – jako prosta i łatwa. Autorzy nie mają zamiaru burzyć żadnego z tych mniemań, chociaż sami uważają, że matematyka bywa prosta i skomplikowana, łatwa i trudna, ale zawsze jest piękna.

Materiał wyłożony w tej książce nie jest bardzo obszerny, ale zawiera zagadnienia, które studenci są zobowiązani opanować, aby świadomie uczestniczyć w dalszym procesie kształcenia. Z uwagi na praktyczny charakter wiedzy matematycznej używanej w dalszym toku studiów wykład ma charakter zwięzły, jest zilustrowany wieloma przykładami i uzupełniony zestawami zadań do samodzielnego rozwiązania. Książkę podzielono na sześć rozdziałów o różnej objętości.

W rozdziale 1. omówiono podstawy logiki i teorii mnogości. Obejmują one znany części studentów (ze szkoły średniej) rachunek zdań, uzupełniony rachunkiem kwantyfikatorowym, oraz budowę prawidłowych reguł wnioskowania, a także elementy teorii mnogości – działania na zbiorach oraz elementy teorii relacji.

Rozdział 2. poświęcony jest macierzom i pewnym aspektom ich zastosowania. Określono tam rodzaje macierzy i opisano działania na macierzach, metodę obliczania macierzy odwrotnych, obliczanie wyznaczników oraz układy równań liniowych. Całość kończy obszerny podrozdział dotyczący rachunku wektorowego.

Rozdział 3. jest najdłuższy, a traktuje o rachunku różniczkowym funkcji jednej zmiennej. Niektóre zagadnienia są znane większości studentów ze szkoły średniej, ale nie wszystkie. Omówiono zagadnienie funkcji odwrotnej, dokonano przeglądu funkcji elementarnych, określono pochodną i sposoby obliczania niektórych pochodnych, przytoczono ważne twierdzenia rachunku różniczkowego – między innymi regułę de L’Hospitala. Poruszono (skutecznie) problemy monotoniczności i wartości ekstremalnych funkcji różniczkowalnych. Na końcu pokazano sposoby badania funkcji z zastosowaniami.

Tematem rozdziału 4. są całki. Większą część rozdziału poświęcono całce nieoznaczonej i metodom całkowania. Następnie omówiono całkę oznaczoną i całkę Riemanna, ich związek oraz wynikające z niego niektóre zastosowania.

Rozdział 5. nosi tytuł „Funkcje wielu zmiennych", ale w większości poświęcony jest funkcjom dwóch zmiennych. Zdefiniowano w nim pochodne cząstkowe, pokazano przykłady ich obliczania, a także zastosowanie. Dużą część tego rozdziału zajmują zastosowania różniczki zupełnej, obejmujące obliczenia przybliżone wartości funkcji, szacowanie błędu przybliżeń, a także – co nie jest często spotykane – zastosowanie różniczki zupełnej do przybliżonego rozwiązywania układów równań nieliniowych. Na zakończenie omówiono obliczanie ekstremum funkcji dwóch zmiennych.

W rozdziale 6. omówiono szeregi nieskończone. Po krótkim wstępie, przypominającym wiadomości o ciągach liczbowych, określono szereg nieskończony i sumę szeregu oraz podano podstawowe kryteria zbieżności szeregów liczbowych o wyrazach dodatnich i szeregu naprzemiennego. Następnie określono szereg funkcyjny i jego promień zbieżności. Po przypomnieniu twierdzenia Taylora z rozdziału 3. omówiono rozwinięcie funkcji w nieskończony szereg Taylora i Maclaurina, po czym pokazano, jak pewne funkcje można rozwinąć w szereg Maclaurina bez obliczania pochodnych. Na zakończenie pokazano zastosowanie szeregu Taylora w przybliżonych obliczeniach pewnych całek oznaczonych.

Wyróżnionymi elementami w tekście są definicje, twierdzenia, uwagi, przykłady, zadania, rysunki i wzory. Są też one odpowiednio oznaczane, a nawet – można powiedzieć – kodowane. I tak – definicje, twierdzenia, uwagi, przykłady i zadania są oznaczane według reguły: „numer rozdziału – rodzaj elementu – numer elementu w tym rozdziale". Środkowa część oznaczenia jest literą, pozostałe – cyframi. Oto przykład:

2.d.5. – piąta **definicja** w drugim rozdziale;
6.t.2. – drugie **twierdzenie** w szóstym rozdziale;
2.u.5. – piąta **uwaga** w drugim rozdziale;
3.p.1. – pierwszy **przykład** w trzecim rozdziale;
1.z.3. – trzecie **zadanie** w pierwszym rozdziale.

Ważniejsze wzory są oznaczane dwiema cyframi (numer rozdziału, numer wzoru), na przykład (3.12) oznacza dwunasty wzór w trzecim rozdziale. Rysunki są numerowane podobnie, ale bez nawiasów.

Dziękujemy Recenzentowi, Panu Profesorowi dr hab. Ryszardowi Płuciennikowi, którego krytyczne, wnikliwe i życzliwe uwagi spowodowały usunięcie błędów i usterek w manuskrypcie.

Obaj autorzy wyrażają szczególne podziękowania swoim Żonom, które w dużym stopniu ponosiły trudy związane z powstaniem tej książki – zwłaszcza w weekendy i popołudnia – i bez których cierpliwości książka powstawałaby jeszcze dłużej.

Jacek Gruszka, Lech Kaczmarek

1. Logika i teoria mnogości

W rozdziale tym omówiono podstawy matematyki: logikę matematyczną i teorię zbiorów (teorię mnogości). W programie „minimum" szkoły średniej nie ma obecnie logiki matematycznej (kiedyś była), czego smutnych skutków doświadczamy w polityce, ekonomii, mass mediach oraz w życiu codziennym. O tym, jak niewiarygodnie daleko od logicznego myślenia może odejść człowiek, przekonujemy się, czytając opinie i komentarze „internautów" pod artykułami w witrynach internetowych albo słuchając wystąpień niektórych uczestników życia publicznego.

1.1. Logika matematyczna

Logika matematyczna jest nauką, której zadaniem jest ***badanie rozumowań*** stosowanych w matematyce i ustalanie kryteriów ich poprawności. Tak zwana ***logika klasyczna*** dzieli się na rachunek zdań i rachunek funkcyjny (kwantyfikatorowy).

1.1.1. Rachunek zdań

Przedmiotem rachunku zdań są związki między zdaniami.

Definicja *1.d.1.* ***Zdaniem*** nazywamy w logice wypowiedź oznajmującą i sensowną, to znaczy taką, której w *ramach danej nauki* możemy przypisać ocenę prawdziwości albo fałszu i tylko jedną z tych ocen.

Zdania nazywamy również ***formułami atomowymi***.

Pojawia się tu problem prawdziwości albo fałszu zdania. O ile z pojęciem fałszu można sobie poradzić łatwo, mówiąc: „to jest fałszem, co nie jest prawdą", o tyle z prawdą poradzić sobie w ten sposób nie możemy, bo wpadniemy w błędne koło. Istnieją różne definicje prawdy (nie musi to przeczyć obiegowemu stwierdzeniu, że „prawda jest tylko jedna"), ale są one dość długie i skomplikowane. Autorzy sądzą, że zrozumiałe i wystarczające będzie stwierdzenie: ***prawdziwe jest to zdanie, które zgodnie z rzeczywistością orzeka o przedmiocie, do którego się odnosi***.

Istnieją zdania oznajmujące, bez wątpienia prawdziwe (albo fałszywe), którym nie możemy przypisać oceny prawdy lub fałszu. Zdanie: *Archimedes urodził się w styczniu* jest albo prawdziwe, albo nieprawdziwe, ale nie możemy tego stwierdzić, gdyż nie znamy (i zapewne nigdy nie poznamy) dokładnej daty urodzin Archimedesa. Dlatego ważne w wyżej podanej definicji jest sformułowanie: *...w ramach danej nauki*.... Innym rodzajem zdań oznajmujących, o których prawdziwości lub nieprawdziwości trudno rozstrzygnąć, jest zdanie typu: *Albert jest dość tęgi*. Może to być bowiem prawdą w grupie skoczków narciarskich i nieprawdą w grupie zawodników sumo. A Albert – cały czas ten sam.

Ustalmy, że w naszych rozważaniach zdanie będzie jednoznacznie prawdziwe albo jednoznacznie fałszywe. Istnieją systemy logik wielowartościowych, ale nie będziemy się tu nimi zajmować.

Zdania, czyli formuły atomowe, łączymy w ***formuły zdaniowe*** za pomocą ***spójników logicznych***, zwanych również ***funktorami zdaniotwórczymi***. Prawdziwość formuły zdaniowej zależy zarówno od prawdziwości formuł atomowych, jak i od jej „struktury", to znaczy sposobu, w jaki została zbudowana. Czytelnik przekona się wkrótce, że można zbudować formułę (wypowiedź) złożoną z samych zdań fałszywych, a mimo to prawdziwą. Można też zrobić odwrotnie.

Spójniki, które zostaną teraz wymienione, to nie wszystkie funktory stosowane w logice, ale w zupełności (a nawet z nadwyżką) wystarczą do skonstruowania wszystkich pozostałych. Będziemy więc stosować następujące spójniki logiczne:

1. Jednoargumentowy funktor ***negacji*** (zaprzeczenia): „nieprawda, że..."; np. negacją zdania: *Jerzy był wczoraj w kinie* jest: *Nieprawda, że Jerzy był wczoraj w kinie* (można też: *Jerzy nie był wczoraj w kinie*).
2. Funktory dwuargumentowe (spójniki łączące dwie formuły):
   - Funktor ***koniunkcji*** (iloczynu logicznego): „... i ..."; np. koniunkcją dwóch zdań jest formuła: *Zjadłem obiad i wyszedłem na spacer*. Zauważmy, że z wypowiedzi tej nie wynika, która czynność nastąpiła wcześniej.
   - Funktor ***alternatywy*** (sumy logicznej): „... lub ..."; np. alternatywą dwóch zdań jest formuła: *Będę się dziś uczył lub pójdę do kina*. Zauważmy, że możliwe są: pierwsza czynność, druga czynność lub obie czynności.
   - Funktor ***implikacji*** (wynikania): „Jeżeli ..., to ..." („Z tego, że ..., wynika ..."); np. implikacją dwóch zdań jest formuła *Jeżeli się dobrze nauczę, to zdam egzamin*. W implikacji rola każdej z dwóch formuł jest inna i *kolejność* tych formuł jest *istotna* (w alternatywie i koniunkcji kolejność formuł nie ma znaczenia). Jest to jasne nawet intuicyjnie, czyli na podstawie doświadczeń z życia codziennego. Części składowe implikacji mają swoje nazwy. Pierwszą formułę implikacji nazywamy ***poprzednikiem***,

a drugą – ***następnikiem***. Wiele sformułowań, zwłaszcza naukowych, ma formę implikacji. Z tego względu pierwszą formułę implikacji nazywamy często ***założeniem***, a drugą – ***tezą***. I wreszcie – jeżeli cała implikacja jest prawdziwa, to implikacja odwrotna prawdziwa być nie musi. Możemy uwierzyć, że prawdziwa jest powyższa formuła: *Jeżeli się dobrze nauczyłem, to zdam egzamin*, ale implikacja odwrotna: *Jeżeli zdam egzamin, to się dobrze nauczyłem* – nie musi być prawdą. Można sobie wyobrazić sytuację, że student, mając do opracowania 150 zagadnień, nauczył się tylko trzech i te właśnie były na egzaminie. Miał sporo szczęścia, egzamin zdał, ale z tego nie wynika, że się dobrze nauczył. Wróćmy zatem do prawdziwej (jak się zdaje) implikacji – *Jeżeli się dobrze nauczyłem, to zdam egzamin*. Tezę (następnik) nazywamy ***warunkiem koniecznym*** założenia (poprzednika). Oznacza to, że fakt zdania egzaminu jest konieczny, aby można było stwierdzić, że się dobrze nauczyłem (łatwiej to zrozumieć na przykładzie z zaprzeczeniami: *Jeżeli nie zdałem egzaminu, to znaczy, że się dobrze nie nauczyłem*). Z drugiej strony – założenie (poprzednik) nazywamy ***warunkiem dostatecznym*** lub ***wystarczającym*** tezy (następnika). Oznacza to, że w prawdziwej implikacji wystarczy prawdziwość założenia, aby teza była prawdziwa. W naszej przykładowej i – jak sądzimy – prawdziwej implikacji wystarczy się dobrze nauczyć, by zdać egzamin (należy, ma się rozumieć, do egzaminu przystąpić, a nie „zachorować").

– Funktor ***równoważności*** (identyczności logicznej): „... wtedy i tylko wtedy, gdy ..."; np. równoważnością jest formuła: *Liczba naturalna jest podzielna przez dwa wtedy i tylko wtedy, gdy liczba jedności jej przedstawienia w systemie dziesiętnym jest parzysta* (dodanie: *... w systemie dziesiętnym...* jest istotne, bo na przykład liczba ***cztery*** w systemie trójkowym ma postać: 11). Kolejność formuł połączonych spójnikiem równoważności nie ma znaczenia.

Formuły zdaniowe będziemy zapisywali za pomocą schematów. Formuły atomowe będziemy oznaczać małymi literami alfabetu łacińskiego i nazywać zmiennymi zdaniowymi, formuły złożone – literami alfabetu greckiego, a spójniki logiczne następującymi symbolami:

$\sim$ – symbol negacji (spotyka się też $\neg$),
$\wedge$ – symbol koniunkcji (spotyka się też &),
$\vee$ – symbol alternatywy,
$\Rightarrow$ – symbol implikacji (spotyka się też $\rightarrow$),
$\Leftrightarrow$ – symbol równoważności (spotyka się też $\leftrightarrow$).

W świetle powyższych rozważań zrozumiała stanie się poniższa definicja.

Definicja** 1.d.2. **Indukcyjna definicja zbioru formuł

1. *Alfabet*

p, q, r, s, a, b... – zmienne zdaniowe (formuły atomowe),
$\sim, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ – funktory zdaniotwórcze (lub spójniki logiczne),
(,) ,[,], ; , : ,, itp. – znaki techniczne.

2. *Gramatyka* (czyli reguły budowania formuł)

Reguła I: Każda zmienna jest formułą.

Reguła II: Jeśli φ i ψ są formułami, to: $\sim(\varphi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \Rightarrow \psi)$, $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ są też formułami.

Reguła III: Każda formuła jest zbudowana z formuł atomowych przez stosowanie skończoną liczbę razy operacji łączenia funktorami, tak jak to pokazano w regule II.

Formuły są ***schematami wypowiedzi***.

Kolejność działania funktorów zdaniotwórczych:
$\sim$ negacja, $\wedge$ koniunkcja, $\vee$ alternatywa, $\Rightarrow$ implikacja, $\Leftrightarrow$ równoważność.

Autorzy szczerze zachęcają jednak do stosowania nawiasów, aby uniknąć niejednoznaczności.

Przykładem formuły zdaniowej jest:

$$\{[p \vee (\sim q \Rightarrow r)] \wedge (\sim r \Rightarrow q)\} \Rightarrow (p \Leftrightarrow \sim r).$$

Powyższe rozważania doprowadziły nas do umiejętności zapisywania formuł zdaniowych i ich klasyfikacji ze względu na budowę. Osobnym i bardzo ważnym problemem jest kwestia prawdziwości formuł zdaniowych. Logika nie wypowiada się w sprawie prawdziwości formuł atomowych, natomiast rozstrzyga o prawdziwości formuł „złożonych" przy założonej (zadanej) prawdziwości (lub nieprawdziwości) formuł atomowych. Narzędziem do takich rozstrzygnięć jest wartościowanie logiczne. Zdaniu prawdziwemu przypisana zostanie wartość **1**, a zdaniu fałszywemu – wartość **0** (cyfry 0 i 1 nie pełnią tu funkcji zapisu liczb, lecz symboli fałszu i prawdy). Jest to tak zwany zero-jedynkowy system wartościowania, ale w literaturze znane są przykłady innych oznaczeń (np. system T – F, od słów *true* i *false*).

Konsekwentnie, formule prawdziwej przypiszemy wartość **1**, a formule fałszywej – wartość **0**. Zależność prawdziwości formuł od prawdziwości ich „części składowych" przedstawiają poniższe tabelki.

– ***Negacja***

p	$\sim p$
0	1
1	0

Jeżeli formuła jest fałszywa, to jej zaprzeczenie jest prawdziwe i odwrotnie.

– ***Koniunkcja***

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Koniunkcja dwóch formuł jest prawdziwa tylko wtedy, gdy obie formuły są prawdziwe.

– ***Alternatywa***

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Alternatywa dwóch formuł jest prawdziwa, jeśli choć jedna z nich jest prawdziwa.

– ***Implikacja***

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Implikacja dwóch formuł jest fałszywa, jeśli poprzednik jest prawdziwy, a następnik – fałszywy. Jest to bardzo nieintuicyjne wartościowanie, gdyż możemy zaakceptować prawdziwość rozumowania, w którym z prawdy wynika prawda, a z fałszu wynika fałsz, oraz nieprawdziwość rozumowania, w którym z prawdy wynika fałsz. Natomiast z trudem akceptujemy poprawność wnioskowania, w którym z fałszu wynika prawda.

– ***Równoważność***

p	q	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Równoważność dwóch formuł jest prawdziwa, jeśli obie mają tę samą wartość logiczną; w przeciwnym razie równoważność jest fałszywa.

Uwaga *1.u.1*. Istnieje szesnaście sposobów łączenia dwóch formuł zdaniowych funktorami (powyżej przedstawiono tylko cztery). Do częściej spotykanych należą: ***wyłączna alternatywa*** (*exclusively „or”*), ***dysjunkcja*** (***kreska Sheffera***) oraz ***funktor jednoczesnego zaprzeczenia***. Nie będziemy ich używać w tej książce, choć *wyłącznej alternatywy* używa wiele języków programowania (czyta się: „*...albo...*” i jest prawdziwa, jeżeli dokładnie jedno z dwóch zdań jest prawdziwe).

Istnieją różne „techniki” badania wartości logicznej formuł zdaniowych. Jedną z nich jest metoda „tabelkowa”, która polega na „rozłożeniu” formuły na formuły atomowe, a następnie na poszczególne formuły składowe, aż do postaci pierwotnej, i na pełnym przeglądzie prawdziwości formuły przy każdej konfiguracji wartości logicznych formuł atomowych. Uwzględniamy oczywiście zasady zawarte w tabelkach zapisanych powyżej

Przykład *1.p.1*. Zbadać wartość logiczną formuł:

a) $\sim(p \wedge \sim q) \Rightarrow (p \Rightarrow \sim q)$;

b) $(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim(\sim p \vee \sim q)$;

c) $(p \vee q) \wedge (\sim p \wedge \sim q)$;

d) $[(p \vee q) \wedge r] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.

Rozwiązania

a) $\sim(p \wedge \sim q) \Rightarrow (\sim p \Rightarrow q)$

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim(p \wedge \sim q)$	$p \Rightarrow \sim q$	$\sim(p \wedge \sim q) \Rightarrow (p \Rightarrow \sim q)$
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0

Odpowiedź: Formuła $\sim(p \wedge \sim q) \Rightarrow (p \Rightarrow \sim q)$ jest fałszywa tylko wtedy, gdy obie formuły atomowe są prawdziwe, w pozostałych przypadkach – formuła jest prawdziwa.

b) $(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim (\sim p \vee \sim q)$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim (\sim p \vee \sim q)$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim (\sim p \vee \sim q)$
0	0	1	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1	1	1

Odpowiedź: Formuła $(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim (\sim p \vee \sim q)$ jest zawsze prawdziwa, niezależnie od wartościowania formuł atomowych.

c) $(p \vee q) \wedge (\sim p \wedge \sim q)$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim p \wedge \sim q$	$(p \vee q) \wedge (\sim p \wedge \sim q)$
0	0	1	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0

Odpowiedź: Formuła $(p \vee q) \wedge (\sim p \wedge \sim q)$ jest zawsze fałszywa, niezależnie od wartościowania formuł atomowych.

d) $[(p \wedge q) \vee r] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$	$p \Rightarrow r$	$[(p \wedge q) \vee r] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	1	1

Odpowiedź: Formuła $[(p \wedge q) \vee r] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ jest fałszywa tylko wtedy, gdy zdania p i q są prawdziwe, a zdanie r jest fałszywe. W pozostałych przypadkach formuła ta jest prawdziwa.

Szczególną rolę w logice odgrywają formuły zawsze prawdziwe.

Definicja *1.d.3*. Formuła zdaniowa, która niezależnie od wartościowania formuł atomowych jest prawdziwa, nosi nazwę ***tautologii*** albo ***prawa logicznego***.

W przykładzie 1.p.1 tautologią jest formuła z punktu (b), a pozostałe formuły nie są tautologiami.

Twierdzenie *1.t.1*. ***Przegląd ważniejszych tautologii***

– Prawo wyłączonego środka

(1.1) $$p \vee \sim p$$

(prawdziwe jest zdanie lub jego zaprzeczenie).

– Prawo podwójnego przeczenia

(1.2) $$\sim (\sim p) \Leftrightarrow p$$

(negacja negacji zdania ma taką samą wartość logiczną jak to zdanie).

– Prawa De Morgana

(1.3) $$\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$$

(zaprzeczenie koniunkcji jest alternatywą zaprzeczeń).

(1.4) $$\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$$

(zaprzeczenie alternatywy jest koniunkcją zaprzeczeń).

– Zasada dowodu „nie wprost”

(1.5) $$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim (p \wedge \sim q)$$

(implikacja jest równoważna zaprzeczeniu koniunkcji: założenia i negacji tezy).

– Prawo transpozycji

(1.6) $$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p).$$

– Prawa przemienności koniunkcji i alternatywy

(1.7) $$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p),$$

(1.8) $$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p).$$

– Prawa łączności koniunkcji i alternatywy

(1.9) $$(p \vee (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \vee r),$$

(1.10) $$(p \wedge (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \wedge r).$$

– Prawo rozdzielności koniunkcji względem alternatywy

(1.11) $$(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)).$$

– Prawo rozdzielności alternatywy względem koniunkcji

(1.12) $$(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r)).$$

– Prawo sylogizmu warunkowego

(1.13) $$(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)].$$

– Prawo Claviusa

(1.14) $$(p \Rightarrow \sim p) \Rightarrow \sim p$$

(jeżeli w wyniku prawidłowo przeprowadzonego rozumowania z założenia otrzymamy jego negację, to właśnie ta negacja jest prawdziwa).

– Prawo Dunsa Scotusa

(1.15) $$p \Rightarrow (\sim p \Rightarrow q)$$

(jeżeli zdanie jest prawdziwe, to z jego negacji wynika każde zdanie);

inna postać:

$$(p \wedge \sim p) \Rightarrow q$$

– Prawo symplifikacji

(1.16) $$p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$$

(zdanie prawdziwe może być wnioskiem w każdej implikacji).

– Prawo Fregego

(1.17) $$[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)].$$

1.1.2. Formalne kryteria poprawności wnioskowań. Reguły wnioskowania

Definicja** 1.d.4.* ***Schematem wnioskowania nazywamy skończony ciąg formuł

$$\frac{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n}{\psi} \quad \left(\begin{array}{cc} & \varphi_1 \\ & \varphi_2 \\ & \ldots \\ \text{albo} & \frac{\varphi_n}{\psi} \end{array} \right),$$

gdzie $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ nazywamy ***przesłankami,*** a ψ ***wnioskiem*** lub konkluzją.

***Przykład** 1.p.2.* Schematami wnioskowania są:

1. Jeżeli nie będę dobrze pracował, to stracę pracę.
   Jeżeli stracę pracę, to będę miał czas pójść do kina.

   Jeżeli będę dobrze pracował, to nie będę miał czasu pójść do kina.

2. Jeżeli nie będę dobrze pracował, to stracę pracę.
   Jeżeli stracę pracę, to będę miał czas pójść do kina.

   Jeżeli nie będę dobrze pracował, to będę miał czas pójść do kina.

Zauważmy, że te dwa schematy różnią się, choć niewiele (przesłanki te same, wniosek inny). Jednak intuicja podpowiada, że pierwszy schemat chyba nie jest prawdziwy, bo w przeciwnym wypadku do kina chodziliby tylko ludzie nie pracujący dobrze (kto nie ma czasu chodzić do kina, ten nie chodzi do kina). W przypadku drugiego schematu możemy się zgodzić, że źle pracujący stracą pracę i będą mieli czas iść do kina (co nie znaczy, że pójdą), ale dobrze pracujący zapewne też będą mieli czas na kino.

Intuicja podpowiada zatem, że pierwszy schemat raczej nie jest prawdziwy, a drugi jest. Logika pozwala tę kwestię *jednoznacznie rozstrzygnąć*.

Definicja** 1.d.5.* Schemat wnioskowania nazywamy ***regułą dowodzenia (lub ***regułą wnioskowania***) wtedy i tylko wtedy, gdy przy każdym wnioskowaniu według tego schematu prawdziwy jest wniosek, o ile tylko prawdziwe są wszystkie przesłanki.

Wnioskowanie logicznie poprawne jest to takie wnioskowanie, które odbywa się według pewnej reguły dowodzenia.

Twierdzenie** 1.t.2. **Przegląd ważniejszych reguł wnioskowania:

– reguła odrywania (*modus ponens*)

$$\frac{p,\ p \Rightarrow q}{q} \tag{1.18}$$

(najczęściej stosowana jako model rozumowania dedukcyjnego);

– reguła odrywania dla równoważności

$$\frac{p,\ p \Leftrightarrow q}{q}; \tag{1.19}$$

– reguła sylogizmu warunkowego

$$\frac{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r}{p \Rightarrow r}; \tag{1.20}$$

– reguła dowodu nie wprost (jedna z tzw. *reguł apagogicznych*)

$$\frac{(p \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p}{p \Rightarrow q}; \tag{1.21}$$

– dylemat konstrukcyjny

$$\frac{p \Rightarrow q,\ \sim p \Rightarrow q}{q}; \tag{1.22}$$

– dylemat destrukcyjny (Orygenesa)

$$\frac{p \Rightarrow q, p \Rightarrow \sim q}{\sim p} \tag{1.23}$$

oparty na dość makabrycznym rozumowaniu:

(Jeżeli wiesz, że *umarłeś*) to (umarłeś).
(Jeżeli *wiesz*, że umarłeś) to (nie umarłeś).
Nie wiesz, że umarłeś.

Reguł wnioskowania jest nieskończenie wiele. Problem zasadniczy – rozstrzygnięcie, który schemat wnioskowania jest regułą wnioskowania, a który taką regułą nie jest – rozwiązuje poniższe twierdzenie.

***Twierdzenie** 1.t.3. **O rozstrzygalności poprawności wnioskowania**.* Schemat wnioskowania

$$\frac{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n}{\psi}$$

jest regułą wnioskowania wtedy i tylko wtedy, gdy formuła $(\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \ldots \wedge \phi_n) \Rightarrow \psi$ jest tautologią.

***Przykład** 1.p.3.* Sprawdzimy teraz, który ze schematów wnioskowania przytoczonych w przykładzie 1.p.2 (o pracy i kinie) jest regułą wnioskowania (przypominamy – *każdy* sposób rozumowania jest schematem wnioskowania, ale tylko *poprawny* schemat jest regułą wnioskowania, czyli regułą dowodzenia).

Oznaczmy:
p – Będę dobrze pracował.
q – Stracę pracę.
r – Będę miał czas pójść do kina.

Pierwszy schemat wnioskowania jest zatem następujący:

$$\frac{\sim p \Rightarrow q,\ q \Rightarrow r}{p \Rightarrow \sim r}.$$

Zgodnie z twierdzeniem 1.t.3 sprawdzamy, czy formuła $[(\sim p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow \sim r)$ jest tautologią.

p	q	r	$\sim p$	$\sim r$	$\sim p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$(\sim p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$	$p \Rightarrow \sim r$	$[(\sim p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow \sim r)$
1	1	1	0	0	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	0	1	1
0	0	0	1	1	0	1	0	1	1

Powyższa formuła *nie jest* zatem tautologią. Jest fałszywa, o ile tylko równocześnie prawdziwe są zdania p i r.

Odpowiedź: Pierwszy z przytoczonych schematów wnioskowania *nie jest* regułą wnioskowania.

Przy tych samych oznaczeniach drugi schemat wnioskowania jest następujący:

$$\frac{\sim p \Rightarrow q,\ q \Rightarrow r}{\sim p \Rightarrow r},$$

musimy zatem sprawdzić, czy tautologią jest formuła

$$[(\sim p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (\sim p \Rightarrow r).$$

p	q	r	$\sim p$	$\sim r$	$\sim p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$(\sim p \Rightarrow q) \wedge \wedge (q \Rightarrow r)$	$\sim p \Rightarrow r$	$[(\sim p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (\sim p \Rightarrow r)$
1	1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	1	0	1	1
0	0	0	1	1	0	1	0	0	1

Odpowiedź: Powyższa formuła *jest* tautologią, a więc badany schemat wnioskowania *jest* regułą wnioskowania.

Przykład *1.p.4*. Poniższy schemat można nazwać: „Fatalne skutki nieuctwa na egzaminie komisyjnym”. Autorzy nie życzą nikomu takiego egzaminu, tym bardziej że skutkiem niezdania egzaminu komisyjnego jest skreślenie z listy studentów. Schemat jest następujący:

Jeżeli nie ściągnę, to obleję egzamin.
Jeżeli obleję egzamin, to wylecę ze szkoły.
Jeżeli ściągnę, to będę oszustem.

Wylecę ze szkoły lub będę oszustem.

Oznaczmy:
p – „Ściągnę” (występuje tu podmiot domyślny),
q – „Obleję egzamin”,
r – „Wylecę ze szkoły”,
s – „Będę oszustem”
(autorzy używają kolokwializmów z premedytacją).

Przy tak dobranych oznaczeniach schemat wnioskowania ma następującą postać:

$$\frac{\sim p \Rightarrow q,\ q \Rightarrow r,\ p \Rightarrow s}{r \vee s}.$$

Sprawdzimy, czy ten schemat jest regułą wnioskowania. Jest tak wtedy, gdy formuła $[(\sim p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge (p \Rightarrow s)] \Rightarrow (r \vee s)$ jest tautologią. Właściwie należałoby zapisać ją w postaci $[(\sim p \Rightarrow q) \wedge ((q \Rightarrow r) \wedge (p \Rightarrow s))] \Rightarrow (r \vee s)$, ale na mocy prawa łączności koniunkcji (twierdzenie 1.t.1 (1.10)) wnosimy, że koniunkcja trzech formuł jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie trzy są prawdziwe. Mamy tu do czynienia z czterema formułami atomowymi (zdaniami). Gdybyśmy sporządzili odpowiednią tabelę zero-jedynkową, to miałaby ona $2^4 = 16$ wierszy. Mając jednak na uwadze specyficzną budowę sprawdzanej formuły zdaniowej, wykorzystamy inną metodę. Pokażemy, że formuła jest tautologią, stosując dowód „nie wprost” (*reductio ad absurdum*). Założymy mianowicie, że istnieje takie wartościowanie formuł atomowych, które powoduje ***fałszywość*** całej formuły. Jeżeli wykażemy, że jest to niemożliwe (za każdym razem otrzymamy sprzeczność), to formuła jest tautologią. Jeżeli jednak nam się to uda, to formuła nie jest tautologią. Mówiąc nieco przewrotnie – sukces jest porażką.

Załóżmy zatem, że istnieje takie wartościowanie, iż formuła:

$$[(\sim p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge (p \Rightarrow s)] \Rightarrow (r \vee s)$$

jest fałszywa.

Formuła ta jest implikacją, zatem jej poprzednik $[(\sim p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge (p \Rightarrow s)]$ *musi być* prawdziwy, a następnik $(r \vee s)$ *musi być* fałszywy (tylko wtedy implikacja jest fałszywa).

Następnik jest alternatywą, zatem oba zdania r oraz s *muszą być* fałszywe (tylko wtedy alternatywa jest fałszywa). Wartości logiczne zdań r oraz s są równe 0.

Poprzednik jest koniunkcją, zatem wszystkie trzy składniki *muszą być* prawdziwe. Składniki te są implikacjami: $\sim p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow r$ oraz $p \Rightarrow s$. Dwie ostatnie z nich mają następniki fałszywe (wartości logiczne zdań r oraz s są przecież równe 0), więc – aby były prawdziwe – *muszą mieć* fałszywe również poprzedniki. Stąd

zdania *p* i *q* są fałszywe; zatem zdanie $\sim p$ *jest prawdziwe*. Pierwsza z implikacji: $\sim p \Rightarrow q$ jest zatem *fałszywa* (z prawdy wynika fałsz), a przed chwilą ustaliliśmy, że (podobnie jak dwie pozostałe) jest *prawdziwa*. Jest to sprzeczność. Założenie o istnieniu wartościowania formuł atomowych, przy którym nasza formuła jest nieprawdziwa, doprowadziło do sprzeczności (absurdu).

Odpowiedź: Powyższa formuła jest tautologią, a przedstawiony wyżej schemat – regułą wnioskowania (dowodzenia). Co dajemy Czytelnikowi pod rozwagę.

Twierdzenie *1.t.4*. ***Twierdzenie o zamkniętości zbioru tautologii***. Zbiór tautologii jest zamknięty ze względu na reguły dowodzenia, tzn. jeśli

$$\frac{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n}{\psi}$$

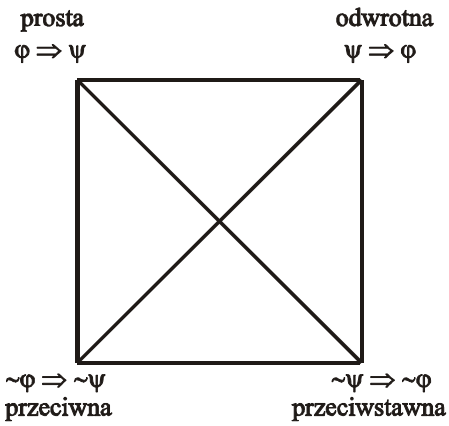
jest regułą dowodzenia oraz gdy $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ są tautologiami, to ψ jest również tautologią.

Twierdzenie *1.t.5*. ***Reguła podstawiania***. Jeżeli za zmienne tautologii na każdym miejscu, gdzie one występują, podstawimy, odpowiednio, ustalone formuły, to otrzymana formuła też jest tautologią.

Twierdzenie *1.t.6*. ***Reguła odrywania dla tautologii***. Jeżeli implikacja oraz poprzednik implikacji są tautologiami, to następnik implikacji też jest tautologią.

Kwadrat logiczny

Niech będzie dana implikacja $\varphi \Rightarrow \psi$; nazwijmy ją implikacją prostą. Implikacją odwrotną nazwiemy: $\psi \Rightarrow \varphi$, przeciwną: $\sim \varphi \Rightarrow \sim \psi$, a przeciwstawną: $\sim \psi \Rightarrow \sim \varphi$. Związek między tymi implikacjami najlepiej przedstawić na diagramie w formie kwadratu (rys. 1.1). Aby wykazać prawdziwość *wszystkich implikacji*, wystarczy wykazać prawdziwość dwóch z nich – leżących na jednym, dowolnym boku kwadratu. Wynika stąd, że dwie implikacje znajdujące się na dowolnej, ustalonej przekątnej kwadratu są równoważne.



Rysunek 1.1

1.1.3. Rachunek funkcyjny (kwantyfikatorowy)

Funkcje zdaniowe

Rozważmy kilka zdań:

1. 8 jest liczbą parzystą.
2. 13 jest liczbą parzystą.
3. 2,718 jest liczbą parzystą.

Pierwsze z nich jest prawdziwe (oczywiście korzystamy z dziesiętnego układu liczbowego), drugie jest nieprawdziwe, a trzecie nie ma sensu[1].

Zauważmy, że każde z trzech zdań jest wypowiedzią o parzystości pewnej konkretnej liczby. Możemy otrzymać więcej takich zdań, gdy za każdym razem w odpowiednie miejsce wstawimy pewną liczbę. Wszystkie te zdania będą miały prawie identyczną postać, którą można uogólnić, przyjmując w miejsce liczby niewiadomą (np. *x*). Formą dla takich zdań jest: „*x* jest liczbą parzystą”.

[1] W tym momencie część Czytelników zapewne zaprotestuje, twierdząc, że trzecie zdanie ma sens, ale jest nieprawdziwe. Zadajmy sobie jednak pytanie o istotę parzystości i nieparzystości. Pojęcie parzystości łączy się z podzielnością liczby przez dwa w takim zbiorze liczbowym, w którym dzielenie *nie zawsze* jest wykonalne. Zatem liczba parzysta to taka, która przy dzieleniu przez dwa daje resztę zero, odpowiednio – liczba nieparzysta przy dzieleniu przez dwa daje resztę jeden. Zatem 8 jest liczbą parzystą, a 13 – nieparzystą w zbiorze (lub pewnym podzbiorze) liczb całkowitych. Inaczej mają się sprawy w zbiorze liczb wymiernych lub rzeczywistych. Tu dzielenie przez dwa (i każdą różną od zera liczbę) jest wykonalne i pojęcie dzielenia z resztą traci sens, zatem pojęcie parzystości – również. Można (ewentualnie) wyznaczyć podział zbioru liczb rzeczywistych (lub wymiernych) na: parzyste, nieparzyste i ani parzyste, ani nieparzyste, ale jest to konstrukcja sztuczna i wiele eleganckich twierdzeń o liczbach przybrałoby wtedy dziwaczną i nieelegancką formę.

Definicja *1.d.6*. Wyrażenie $\varphi(x)$, w którym występuje zmienna *x* i które staje się zdaniem prawdziwym lub fałszywym, gdy w miejsce zmiennej *x* wstawimy dowolny element niepustego zbioru A, nazywamy ***funkcją zdaniową*** zmiennej *x*; zbiór A nazywamy ***zakresem*** funkcji $\varphi(x)$. Często zapisujemy: $\varphi(x), \quad x \in A$.

Definicja *1.d.7.* Zbiór zawierający wszystkie elementy zakresu A funkcji zdaniowej $\varphi(x)$, które po wstawieniu w miejsce zmiennej *x* tworzą zdanie *prawdziwe*, nazywamy ***dziedziną*** funkcji zdaniowej i oznaczamy D_φ. Zapis: $D_\varphi = \{x \in A : \varphi(x)\}$.

Przykład *1.p.5*. Oznaczmy przez *Z* ***zbiór liczb całkowitych*** (to standardowe oznaczenie, które będzie od tej chwili obowiązywać). Wyrażenie: $x^2 + 2x \leq 0$, $x \in Z$, jest funkcją zdaniową zmiennej *x*, której zakresem jest zbiór wszystkich liczb całkowitych *Z* ($\varphi(x) : x^2 + 2x \leq 0$). Gdy jednak rozwiążemy nierówność będącą treścią tej funkcji zdaniowej, wówczas okaże się, że $D_\varphi = \{-2, -1, 0\}$, a zatem dziedzina zawiera tylko trzy elementy.

Analogicznie wprowadza się pojęcie funkcji zdaniowej dwóch zmiennych $\varphi(x, y)$. Nieco kłopotu może przysporzyć definiowanie zakresu i dziedziny, ale te trudności znikną po zdefiniowaniu iloczynu kartezjańskiego.

Podobnie jak negacje, alternatywy, koniunkcje, implikacje oraz równoważności formuł zdaniowych, istnieją negacje, alternatywy, koniunkcje, implikacje oraz równoważności funkcji zdaniowych. Twierdzenie: *Jeśli kwadrat liczby rzeczywistej jest równy* 1, *to liczbą tą jest* 1 *lub* –1 można zapisać:

$$\left(x^2 = 1\right) \Rightarrow \left[(x = 1) \vee (x = -1)\right], \quad x \in R.$$

Natomiast sformułowanie: *Liczba wymierna lub parzysta wielokrotność* $\sqrt{2}$ zapisujemy:

$$(x \in Q) \vee [(x = 2k\sqrt{2}), k \in Z],$$

gdzie przez *Q* oznaczamy zbiór liczb wymiernych.

Kwantyfikatory

Wyrażenie: „***dla każdego...***” nazywamy ***kwantyfikatorem ogólnym*** (albo dużym) i oznaczamy: $\forall$ albo $\bigwedge$ (we współczesnej matematyce częściej stosuje się symbol $\forall$).

Wyrażenie: „***istnieje taki ..., że...***” nazywamy ***kwantyfikatorem szczegółowym*** (albo małym) i oznaczamy: $\exists$ albo $\bigvee$ (we współczesnej matematyce częściej stosuje się symbol $\exists$).

W tej książce używana będzie współczesna notacja kwantyfikatorów ($\forall$ i $\exists$).

Przykład *1.p.6.* Zdanie: *Kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną* zapisujemy:

$$\forall x \in R : \left(x^2 \geq 0\right),$$

a zdanie: *Istnieje liczba rzeczywista większa od* 3,14 *i mniejsza* od $\frac{22}{7}$ zapisujemy:

$$\exists\, x \in R : \left(3{,}14 < x < \frac{22}{7}\right).$$

Jeżeli kwantyfikator odnosi się do funkcji zdaniowej $\varphi(x)$, której zakresem jest zbiór A, to zapisujemy odpowiednio: $\forall\, x \in A : \varphi(x)$ oraz $\exists\, x \in A : \varphi(x)$. Jeżeli natomiast z wcześniejszych rozważań wynika bez wątpliwości, jaki zbiór jest zakresem zmiennej, to zapisujemy odpowiednio: $\forall\, x : \varphi(x)$ oraz $\exists\, x : \varphi(x)$.

Twierdzenie *1.t.7*. ***Prawa rachunku kwantyfikatorowego***

– Rozdzielność względem alternatywy i koniunkcji:

(1.24)
$$\forall x : (\varphi(x) \wedge \psi(x)) \Leftrightarrow [\forall x : \varphi(x) \wedge \forall x : \psi(x)],$$
$$\exists x : (\varphi(x) \wedge \psi(x)) \Leftrightarrow [\exists x : \varphi(x) \wedge \exists x : \psi(x)];$$

(1.25)
$$\forall x : (\varphi(x) \vee \psi(x)) \Leftrightarrow [\forall x : \varphi(x) \vee \forall x : \psi(x)],$$
$$\exists x : (\varphi(x) \vee \psi(x)) \Leftrightarrow [\exists x : \varphi(x) \vee \exists x : \psi(x)].$$

– Negacja (prawa De Morgana dla rachunku kwantyfikatorowego). Zaprzeczenie zdania z kwantyfikatorem polega na zmianie kwantyfikatora (z ogólnego na szczegółowy albo odwrotnie) i zaprzeczeniu funkcji zdaniowej.

(1.26) $\sim (\forall x : \phi(x)) \Leftrightarrow (\exists x : \sim \phi(x))$ oraz $\sim (\exists x : \varphi(x)) \Leftrightarrow (\forall x : \sim \varphi(x))$.

Wnioskami z powyższego twierdzenia są następujące zależności:

(1.27) $$\sim [\forall\, x : (\varphi(x) \wedge \psi(x))] \Leftrightarrow \exists x : [(\sim \varphi(x)) \vee (\sim \psi(x))],$$

(1.28) $$\sim [\forall\, x : (\varphi(x) \vee \psi(x))] \Leftrightarrow \exists x : [(\sim \varphi(x)) \wedge (\sim \psi(x))],$$

(1.29) $$\sim [\exists\, x : (\varphi(x) \wedge \psi(x))] \Leftrightarrow \forall x : [(\sim \varphi(x)) \vee (\sim \psi(x))],$$

(1.30) $$\sim [\exists x : (\varphi(x) \vee \psi(x))] \Leftrightarrow \forall x : [(\sim \varphi(x)) \wedge (\sim \psi(x))].$$

– Prawa przestawiania kwantyfikatorów. Jeżeli w funkcji zdaniowej zawierającej co najmniej dwie zmienne są dwa kwantyfikatory, to przestawiając je, otrzymamy funkcję równoważną, *z wyjątkiem* sytuacji, gdy kwantyfikator ogólny występuje przed kwantyfikatorem szczegółowym.

Twierdzenie** 1.t.8. **Prawa przestawiania kwantyfikatorów

(1.31) $$(\forall x \forall y : \varphi(x, y)) \Leftrightarrow (\forall y \forall x : \varphi(x, y)),$$

(1.32) $$(\exists x \exists y : \varphi(x, y)) \Leftrightarrow (\exists y \exists x : \varphi(x, y)),$$

(1.33) $$(\exists x \forall y : \varphi(x, y)) \Rightarrow (\forall y \exists x : \varphi(x, y)).$$

***Przykład** 1.p.7.* Zapis stwierdzenia *Liczba całkowita n jest parzysta*:

$n \in Z \quad \wedge \quad (\exists k \in Z : n = 2k)$.

Zapis twierdzenia *Kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest nieujemny*:

$\forall x \in R : x^2 \geq 0$.

Zapis twierdzenia *Nie ma największej liczby naturalnej*:

$\forall n \in N \; \exists m \in N : (m > n)$.

1.2. Elementy teorii mnogości

1.2.1. Działania na zbiorach

W teorii mnogości pojęciem pierwotnym (nie definiowanym) jest pojęcie zbioru, natomiast pierwotnym symbolem predykatywnym jest symbol przynależności do zbioru (znany zapewne wszystkim Czytelnikom symbol $\in$). Zbiory będziemy oznaczać zazwyczaj wielkimi literami alfabetu łacińskiego. Zbiory, których elementami są zbiory, nazywać będziemy czasem klasami zbiorów i oznaczać małymi literami alfabetu greckiego (ale nie zawsze). Elementy zbioru nie powtarzają się. Zbiór pusty to zbiór nie zawierający żadnego elementu (oznaczamy go: $\varnothing$). Istnieje *tylko*

jeden zbiór pusty. Jeżeli element nie należy do zbioru, to zamiast pisać: $\sim (x \in A)$, będziemy zapisywać: $x \notin A$.

– Równość zbiorów: $A = B \Leftrightarrow [\forall x : x \in A \Leftrightarrow x \in B]$.

– Inkluzja zbiorów (zawieranie): $A \subset B \Leftrightarrow \forall x : (x \in A \Rightarrow x \in B)$ (zbiór *A* nazywamy ***podzbiorem*** zbioru *B*, zbiór *B* nazywamy ***nadzbiorem*** zbioru *A*).

– Suma zbiorów (suma mnogościowa): $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$.

– Iloczyn zbiorów (przekrój): $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$.

– Różnica zbiorów: $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$.

Jeżeli wszystkie zbiory będziemy rozpatrywać w pewnej ustalonej przestrzeni (czyli nie jako zbiory „w ogóle", ale jako zbiory np. na prostej, na płaszczyźnie, zbiory liczbowe, zbiór ludzi itp.), to możemy zdefiniować ***dopełnienie zbioru*** jako zbiór tych wszystkich elementów przestrzeni, które do danego zbioru nie należą. Oznaczmy przez *X* przestrzeń, w której są zawarte rozważane przez nas zbiory.

Dopełnienie zbioru: $A' = \{x : x \in X \wedge x \notin A\}$.

Korzystając z definicji różnicy zbiorów, stwierdzamy: $A' = X \setminus A$.

Twierdzenie *1.t.9.* ***Własności działań na zbiorach***

– Przemienność sumy i przemienność iloczynu:

(1.34) $$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A.$$

– Łączność sumy i łączność iloczynu:

(1.35) $$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

– Rozdzielność iloczynu względem sumy i rozdzielność sumy względem iloczynu:

(1.36) $$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cup \cap (A \cup C).$$

– Prawa absorpcji:

(1.37) $$A \cap (A \cup B) = A, \quad A \cup (A \cap B) = A.$$

– Związki między inkluzją i sumą zbiorów oraz inkluzją i iloczynem zbiorów:

(1.38) $$A \subset B \Rightarrow A \cup B = B, \quad A \subset B \Rightarrow A \cap B = A,$$

(1.39) $$[(A \subset B) \wedge (C \subset D)] \Rightarrow [(A \cup C) \subset (B \cup D)],$$
$$[(A \subset B) \wedge (C \subset D)] \Rightarrow [(A \cap C) \subset (B \cap D)].$$

– Związki między inkluzją i różnicą zbiorów:

(1.40) $$[(A \subset B) \wedge (C \subset D)] \Rightarrow [(A \setminus D) \subset (B \setminus C)].$$

– Prawa De Morgana dla różnicy zbiorów:

(1.41) $$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C),$$
$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

– Związki między zbiorami i ich dopełnieniami:

(1.42) $$X' = \varnothing, \qquad \varnothing' = X.$$

(1.43) $$A \cup A' = X, \quad A \cap A' = \varnothing, \quad (A \subset B) \Rightarrow (B' \subset A').$$

– Prawa De Morgana dla dopełnień zbiorów:

(1.44) $$(A \cup B)' = A' \cap B', \qquad (A \cap B)' = A' \cup B'.$$

1.2.2. Iloczyn kartezjański zbiorów

– **Para nieuporządkowana**. Parą nieuporządkowaną nazywamy zbiór dwuelementowy $\{a,b\}$. Zauważmy że elementy pary nieuporządkowanej muszą się różnić, ponieważ $\{a,a\} = \{a\}$, zatem jeżeli się nie różnią, to mamy zbiór jednoelementowy. Należy zaznaczyć, że zbiór jednoelementowy $\{a\}$ nie jest tożsamy z elementem *a* (czym innym jest „być zbiorem”, a czym innym „należeć do zbioru”).

– **Para uporządkowana**. Istnieją różne sposoby zdefiniowania pary uporządkowanej. Oto jeden z nich: Parą uporządkowaną nazywamy zbiór dwuelementowy, w którym wyróżniony jest jeden z elementów, nazwany elementem pierwszym (element, który nie jest elementem pierwszym, będziemy nazywać drugim). Parę uporządkowaną oznaczamy (a,b). Dwie pary uporządkowane są równe, jeśli mają te same elementy w tej samej kolejności. Zatem:

$$(a,b) = (c,d) \quad \Leftrightarrow \quad (a = c \wedge b = d).$$

W odróżnieniu od pary nieuporządkowanej, para uporządkowana może zawierać dwa identyczne elementy, zatem istnieją pary uporządkowane postaci (a,a). Odnotujmy, że jeśli $a \neq b$, to $(a,b) \neq (b,a)$.

Definicja *1.d.8.* Niech będą dane dwa niepuste zbiory *A* i *B*. Iloczynem kartezjańskim $A \times B$ tych zbiorów nazywamy zbiór wszystkich par uporządkowanych, których pierwszy element należy do zbioru *A*, natomiast drugi do zbioru *B*.

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

Jeśli $A = B$, to $A \times A$ możemy oznaczyć A^2 i wówczas:

$$A \times A = A^2 = \{(a,b) : a,b \in A\}.$$

Analogicznie możemy zdefiniować trójkę uporządkowaną, *n*-tkę uporządkowaną (w naukach informatycznych noszą one nazwę *krotki*).

1.2.3. Pojęcie relacji

Jednym z najważniejszych pojęć matematyki jest pojęcie relacji. Definicja relacji jest zadziwiająco prosta, a jednocześnie niezwykle głęboka. W tej książce ograniczymy się do relacji dwuargumentowych, choć aparatura pojęciowa wprowadzona powyżej upoważnia do wprowadzenia relacji trój- i więcej argumentowych.

Definicja *1.d.9.* Niech będą dane niepuste zbiory *A* i *B*. ***Relacją*** nazywamy każdy podzbiór iloczynu kartezjańskiego $A \times B$.

Przykład *1.p.8.* Niech będzie dany zbiór $A = \{2,3,5,9\}$. Utwórzmy iloczyn kartezjański:

$$A \times A = \{(2,2),(2,3),(2,5),(2,9),(3,2),(3,3).(3,5),(3,9),$$
$$(5,2),(5,3),(5,5),(5,9),(9,2),(9,3),(9,5),(9,9)\}.$$

Ze zbioru $A \times A$ wybierzmy pewien podzbiór (relację), np.:

$$M = \{(2,3),(2,5),(2,9),(3,5),(3,9),(5,9)\}.$$

Możemy to zapisać w innej formie:

$(2,3) \in M$, $(2,5) \in M$, $(2,9) \in M$, $(3,5) \in M$, $(3,9) \in M$, $(5,9) \in M$.

Zauważmy, że ta forma zapisu jest dość pracochłonna; wymaga użycia za każdym razem lewego nawiasu, prawego nawiasu, przecinka i symbolu przynależności. Zapis jest niczym więcej jak umową – pewną zrozumiałą dla wszystkich (oby!) konwencją. Aby rzecz całą uprościć, zapiszmy:

$2M3,\quad 2M5,\quad 2M9,\quad 3M5,\quad 3M9,\quad 5M9.$

Zapis, np. $2M9$, będziemy czytali: para $(2,9)$ należy do relacji *M*. Wydaje się sensowne pytanie: Dlaczego tę relację nazwaliśmy właśnie *M*? No właśnie, może by ją nazwać inaczej? Relacja jest zbiorem; umówiliśmy się, że zbiory będziemy oznaczać zazwyczaj wielkimi literami alfabetu łacińskiego. „Zazwyczaj" nie oznacza „zawsze". Po oznaczeniu powyższej relacji znakiem < zapis wygląda tak:

$2<3,\quad 2<5,\quad 2<9,\quad 3<5,\quad 3<9,\quad 5<9.$

Od formy $M=\{(2,3),(2,5),(2,9),(3,5),(3,9),(5,9)\}$ do postaci 2 < 3, 2 <5, 2 < 9, 3 < 5, 3 < 9, 5 < 9 nic oprócz *konwencji zapisu* się nie zmieniło.

Jednak Czytelnik zapewne inaczej czyta obie postacie. Jeżeli teraz nazwiemy relację *M* ***relacją mniejszości*** w zbiorze *A*, to będzie jasne, jak nazwać np. relację $E=\{(2,2),(3,3),(5,5),(9,9)\}$.

Żeby jednak nie było wątpliwości, powtórzmy: *każdy* podzbiór iloczynu kartezjańskiego jest relacją.

Definicja *1.d.10.* Niech będzie dana relacja $R\subset X\times Y$. ***Relacją odwrotną*** nazywamy relację $R^{-1}\subset Y\times X$, taką że

$$R^{-1}=\{(y,x): y\in Y\wedge x\in X\wedge (x,y)\in R\}.$$

Definicja *1.d.11.* Niech będą dane relacje: $R\subset X\times Y$ oraz $S\subset Y\times Z$. ***Złożeniem relacji*** (albo: ***kompozycją***) nazywamy relację:

$$R*S=\{(x,z): x\in X\ \wedge z\in Z\wedge \exists y\in Y:[(x,y)\in R\wedge (y,z)\in S]\}.$$

1.2.4. Rodzaje relacji

1. ***Relacja zwrotna***. Relację $R\subset X\times X$ nazywamy zwrotną, jeśli

   $\forall x\in X:(x,x)\in R$.

   Przykładem takiej relacji w zbiorze liczb naturalnych może być relacja podzielności, czyli $(x,y)\in R\Leftrightarrow y=k\cdot x,$ dla pewnego $k\in N$. Wiadomo, że

każda liczba naturalna jest podzielna (między innymi) przez samą siebie. Nie musimy się ograniczać do zbiorów liczbowych. W grupie ludzi ustanówmy relację: Każdy element jest w relacji z tymi wszystkimi, których lubi. Można przyjąć, że każdy lubi siebie (miejmy nadzieję, że oprócz tego jeszcze kogoś), zatem tak określona relacja jest zwrotna.

2. ***Relacja przechodnia***. Relację $R \subset X \times X$ nazywamy przechodnią, jeśli

$R * R \subset R$,

to znaczy $\forall x, y, z \in X : [(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R] \Rightarrow (x, z) \in R$

(w skrócie: $(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$).

Taką relacją jest relacja „mniejszości" w zbiorze liczb rzeczywistych ($(a < b \wedge b < c) \Rightarrow a < c$), inną – relacja podzielności (jeśli *a* jest podzielne przez *b* i *b* jest podzielne przez *c*, to *a* jest podzielne przez *c*) w zbiorze liczb naturalnych. Oczywiście, nie wszystkie relacje są przechodnie. Jeśli pan A wybił ząb panu B, a pan B wybił ząb panu C, to przecież nie wynika stąd, że pan A wybił ząb panu C. A relacja określona wybijaniem zębów w tym trójelementowym zbiorze została określona.

3. ***Relacja symetryczna***. Relację $R \subset X \times X$ nazywamy symetryczną, jeśli

$R^{-1} \subset R$,

to znaczy $\forall x, y \in X : (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$

(w skrócie: $xRy \Rightarrow yRx$).

Określmy na przykład relację R w zbiorze liczb całkowitych Z: $xRy \Leftrightarrow x - y = 2k$ dla pewnego $k \in Z$. Jeśli warunek ten jest spełniony, to $y - x = 2 \cdot (-k)$, a przecież: $-k \in Z$, zatem yRx. W zbiorze ludzi symetryczna jest relacja *bycia w związku małżeńskim z*... Jeśli A jest w związku małżeńskim z B, to B jest w związku małżeńskim z A (relacja nie wyklucza poligamii i poliandrii). Podana relacja nie jest zwrotna ani przechodnia (na szczęście), ale w ogóle relacja symetryczna może być zwrotna lub przechodnia.

4. ***Relacja słabo antysymetryczna***. Relację $R \subset X \times X$ nazywamy słabo antysymetryczną, jeśli

$[(x, y) \in R \wedge (y, x) \in R] \Rightarrow x = y$

(w skrócie: $(xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$).

W zbiorze liczb rzeczywistych taką relacją jest „$\leq$". Istotnie: jeśli $x \leq y$ i $y \leq x$, to $x = y$. Podobnie w zbiorze liczb naturalnych – jeśli *a* jest

podzielne przez *b* i *b* jest podzielne przez *a*, to $a = b$. W meczu piłki nożnej – jeśli drużyna A nie strzeliła więcej bramek niż drużyna B, a drużyna B nie strzeliła więcej bramek niż drużyna A, to obie drużyny strzeliły tyle samo bramek (remis).

5. ***Relacja antysymetryczna*** lub ***silnie antysymetryczna***. Relację $R \subset X \times X$ nazywamy silnie antysymetryczną, jeśli

$R \cap R^{-1} = \varnothing$,

czyli $\forall x, y \in X : (x, y) \in R \;\Rightarrow\; (y, x) \notin R$

(w skrócie: $xRy \Rightarrow \sim (yRx)$).

Taką relacją w zbiorze liczb rzeczywistych jest relacja „$<$” (jeśli $a < b$, to $\sim (b < a)$). W meczach tenisa lub siatkówki (nie ma remisów) relacja: *drużyna A wygrała z drużyną B* jest silnie antysymetryczna.

6. ***Relacja spójna***. Relację $R \subset X \times X$ nazywamy spójną, jeśli

$\forall x, y \in X : [(x, y) \in R \vee (y, x) \in R]$

(w skrócie: $\forall x, y \in X : (xRy \vee yRx)$).

Przykładem relacji spójnej w zbiorze liczb rzeczywistych jest relacja „$\leq$”, natomiast relacja „$<$” nie jest spójna. Nie należy stąd wnosić, że relacja słabo antysymetryczna jest spójna, a silnie antysymetryczna taka nie jest. W zbiorze liczb naturalnych relacja podzielności $(a, b) \in R$, jeśli *a* jest dzielnikiem *b*, jest słabo antysymetryczna, ale nie jest spójna ($(2,3) \notin R$ i $(3,2) \notin R$). Zapis wyników spotkań fazy „grupowej” w jednej grupie mistrzostw świata w siatkówce (system „każdy z każdym”) jest spójną relacją silnie antysymetryczną.

1.2.5. Przegląd najważniejszych relacji

Relacja równoważności

Z chwilą rozpoczęcia roku akademickiego zaczynają się wykłady i ćwiczenia. Oczywiście odbywają się one według pewnego planu. Tak się składa, że większość studentów trafia bezbłędnie o określonej godzinie do określonej sali, aby wysłuchać wykładu. Wiedzę o tym, gdzie i kiedy odbędzie się wykład, czerpią z opublikowanego (na tablicy ogłoszeń lub w Internecie) planu zajęć. Z ogłoszeń dowiadują się też o zmianach planu itd. Jak to się jednak dzieje, że studentowi udaje się trafić w odpowiednie miejsce o oznaczonej (powiedzmy) godzinie, jeśli na owym planie

zajęć nie ma nazwiska żadnego studenta? (nazwisko wykładowcy zazwyczaj jest). Są tam pewne nazwy (np. Inf. I. sem.), ale co one oznaczają? Odpowiedź jest prosta – są to nazwy grup wykładowych. Zastanówmy się, jakie cechy świadczą o przynależności do grupy wykładowej (*z danego przedmiotu*). Pierwszą taką cechą jest zwrotność: „należę do tej właśnie grupy, do której należę" (a nie do innej) – istotnie, trudno się rozdwoić. Drugą cechą jest symetria: „jeśli ja należę do tej samej grupy co ty, to ty należysz do tej samej grupy co ja". Wreszcie trzecią cechą jest przechodniość: „jeśli ja należę do tej samej grupy co ty, a ty należysz do tej samej grupy co on, to ja należę do tej samej grupy co on". *I to wszystko* – te trzy cechy relacji międzyludzkich pozwalają na jednoznaczny podział na grupy wykładowe.

Definicja *1.d.12.* Niech będzie dany niepusty zbiór *A*. Relację $R \subset A \times A$ nazywamy relacją równoważności, jeśli jest:

– zwrotna,
– symetryczna,
– przechodnia.

Jeżeli elementy *a* i *b* należące do zbioru *A* są takie, że $(a,b) \in R$ (czyli *aRb*), to mówimy, że są one ***równoważne*** (w sensie relacji *R*).

Czasami relację równoważności oznacza się symbolem „$\approx$".

Twierdzenie *1.t.10.* ***Zasada abstrakcji***. Jeżeli w zbiorze *A* została określona relacja równoważności *R* ($R \subset (A \times A)$), to dzieli ona zbiór *A* na klasy elementów równoważnych w ten sposób, że każdy element zbioru *A* należy do jednej i tylko jednej klasy. Klasy te nazywamy ***klasami abstrakcji***.

Zbiór klas abstrakcji nazywamy ***zbiorem ilorazowym*** i oznaczamy $A|_R$. Klasę abstrakcji elementu *x* oznaczamy $[x]_R$.

Przykład *1.p.9.* W zbiorze liczb całkowitych *Z* określamy relację „$\approx$" w taki sposób, że para liczb należy do relacji, jeśli mają taką samą resztę przy dzieleniu przez 3. Resztą z dzielenia przez 3 może być tylko liczba nieujemna, np. $5:3=1\ r2$, $10:3=3\ r1$, $-1:3=-1\ r2$, $15:3=5\ r0$. Łatwo zauważyć, że dwie liczby całkowite mają tę samą resztę dzielenia przez 3 wtedy i tylko wtedy, gdy różnica tych liczb jest podzielna przez 3 (bez reszty).

Zatem $a \approx b \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in Z : (a-b) = 3 \cdot k$.

Zdefiniowana powyżej relacja ma następujące własności:

– zwrotność: $a \approx a$, ponieważ $a - a = 0 = 3 \cdot 0$, zatem szukaną liczbą *k* jest 0;
– symetria: jeśli $a \approx b$, czyli istnieje liczba całkowita *k*, taka że $a - b = 3 \cdot k$, to przecież $b - a = -3 \cdot k = 3 \cdot (-k)$, liczba $(-k)$ jest oczywiście całkowita, zatem $b \approx a$;

– przechodniość: jeśli $a \approx b$ i $b \approx c$, to istnieją takie liczby k i m, że $a-b=3\cdot k$ i $b-c=3\cdot m$, zatem $(a-b)+(b-c)=3\cdot k+3\cdot m$, stąd $a-b+b-c=3\cdot\underbrace{(k+m)}_{p}$, czyli $a-c=3\cdot p$, więc ostatecznie $a \approx c$.

Pokazaliśmy, że relacja ta jest relacją równoważności. Ponieważ resztą z dzielenia przez 3 może być 0, 1 lub 2, to klasami abstrakcji będą:

$[0]_{\approx}=\{...,-9,-6,-3,0,3,6,9,...\}$,

$[1]_{\approx}=\{...,-8,-5,-2,1,4,7,...\}$,

$[2]_{\approx}=\{...,-7,-4,-1,2,5,8,...\}$.

Łatwo zauważyć, że każda liczba całkowita należy do jednej i tylko jednej klasy abstrakcji.

Zbiorem ilorazowym zbioru liczb całkowitych przez powyższą relację jest {0,1,2}; podobnie można określić dodawanie liczb z każdej pary klas (niekoniecznie różnych), np. $(3\cdot k+2)+(3\cdot m+2)=3\cdot(k+m)+4=3\cdot(k+m+1)+1$. W ten sposób możemy ułożyć tabelę działań w zbiorze ilorazowym

$+_3$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Określone powyżej działanie nazywamy ***dodawaniem modulo 3***.

Łatwo będzie też ułożyć tabelę mnożenia w zbiorze ilorazowym:

$\cdot_3$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Na przykład: $(3\cdot k+2)\cdot(3\cdot m+2)=9km+6k+6m+4=3\cdot(3km+2k+2m+1)+1$ (stąd $2\cdot_3 2=1$).

Relacja częściowego porządku

Definicja *1.d.13.* Niech będzie dany niepusty zbiór *A*. Relację $S \subset A\times A$ nazywamy relacją częściowego porządku, jeśli jest:

– zwrotna,
– słabo antysymetryczna,
– przechodnia.

Relację częściowo porządkującą oznaczamy często symbolem „$\leq$”.

Przykład *1.p.10.* W zbiorze liczb naturalnych N określamy relację „$\prec$” ($\prec \subset (N \times N)$) w następujący sposób: $a \prec b \Leftrightarrow (\exists k \in N : a \cdot k = b)$ (b jest podzielne przez a). Czytelnik z łatwością sam sprawdzi, że jest to relacja częściowego porządku.

Funkcje

Definicja *1.d.14.* Niech będą dane niepuste zbiory X i Y. Relację $f \subset X \times Y$ spełniającą warunki:

(a) $\forall x \in X \; \exists y \in Y : (x, y) \in f$ oraz

(b) $[\forall x \in X \; \forall y_1, y_2 \in Y : (x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f] \Rightarrow (y_1 = y_2)$

nazywamy funkcją.

Zamiast $(x, y) \in f$ stosujemy zapis $y = f(x)$.

Zbiór X nazywamy ***dziedziną*** albo ***zbiorem argumentów*** funkcji f.

Zbiór Y nazywamy ***przeciwdziedziną*** albo ***zbiorem wartości*** funkcji f.

O funkcji f mówimy, że jest ***odwzorowaniem zbioru*** X w zbiór Y i zapisujemy: $f : X \to Y$.

Jeżeli oprócz warunków określonych w definicji *1.d.14* spełniony jest warunek:

(c) $\forall y \in Y \; \exists x \in X : (x, y) \in f$,

to f nazywamy ***funkcją „na”*** albo ***surjekcją***.

Jeżeli oprócz warunków określonych w definicji *1.d.14* spełniony jest warunek:

(d) $[\forall x_1, x_2 \in X \; \forall y \in Y : (x_1, y) \in f \wedge (x_2, y) \in f] \Rightarrow (x_1 = x_2)$,

to f nazywamy ***funkcją różnowartościową*** lub ***iniekcją***.

Jeżeli spełnione są wszystkie warunki (a), (b), (c), (d), to funkcję f nazywamy ***wzajemnie jednoznaczną*** albo ***bijekcją***.

Jeśli dane są dwie funkcje: $f : X \to Y$ oraz $g : Y \to Z$, to złożeniem funkcji $f \circ g$ nazywamy funkcję:

$$f \circ g : X \to Z \; \wedge [((x, z) \in f \circ g) \Leftrightarrow \exists y \in Y : (x, y) \in f \wedge (y, z) \in g].$$

Możemy zatem stwierdzić, że $(f \circ g)(x) = g(f(x))$.

***Przykład** 1.p.11.* Jeżeli $g(x) = \log x$, $f(x) = 2 + \sin x$, to $(f \circ g)(x) = \log(2 + \sin x)$, natomiast $(g \circ f)(x) = 2 + \sin(\log x)$.

Zadania

***Zadanie** 1.z.1.* Sprawdzić, czy następujące wyrażenia są tautologiami:

a) $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow p] \Rightarrow p$;

b) $p \Rightarrow (p \vee q)$;

c) $p \Rightarrow [(\sim p) \vee q]$;

d) $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$;

e) $[(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow (q \Rightarrow p)$;

f) $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$;

g) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \Rightarrow (p \vee q)$;

h) $\sim(p \wedge \sim p)$;

i) $[\sim(p \vee q) \Rightarrow (\sim p \wedge q)] \Rightarrow (p \vee q)$;

j) $[\sim(p \vee q) \Rightarrow q] \Leftrightarrow (p \wedge q)$;

k) $[(p \vee q) \wedge (p \vee q)] \Rightarrow [p \Rightarrow (p \vee q)]$;

l) $\{p \Rightarrow [\sim(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)]\} \Rightarrow (\sim p)$;

m) $\{(p \wedge q) \Rightarrow [\sim q \Leftrightarrow (\sim p \vee q)]\} \Rightarrow [p \wedge (\sim p \vee q)]$;

n) $[\sim p \wedge (\sim q \vee p)] \Rightarrow \{\sim q \wedge [(p \wedge q) \Leftrightarrow q]\}$.

***Zadanie** 1.z.2*. Sprawdzić, czy następujące schematy wnioskowania są regułami dowodzenia:

a)
Jeśli wydałem dużo pieniędzy, to jestem zamożny.
Jeśli wydałem dużo pieniędzy, to nie jestem zamożny.

Nie jestem zamożny.

b)
Jeśli wydałem dużo pieniędzy, to jestem zamożny.
Jeśli nie wydałem dużo pieniędzy, to jestem zamożny.

Jestem zamożny.

***Zadanie** 1.z.3*. Sprawdzić, która z poniższych relacji jest relacją równoważności:

a) $R \subset N \times N$, $(a,b) \in R \Leftrightarrow \frac{|a-b|}{4} \in (N \cup \{0\})$;

b) $S \subset N \times N$, $(a,b) \in S \Leftrightarrow \frac{|a \cdot b - 1|}{2} \in (N \cup \{0\})$.

Odpowiedzi

1.z.1. a) tak; b) tak; c) nie; d) tak; e) nie; f) tak; g) nie; h) tak; i) tak; j) nie; k) tak; l) nie; m) nie; n) tak.
1.z.2. a) nie; b) tak.
1.z.3. a) tak; b) nie.

2. Rachunek macierzowy

2.1. Macierze

2.1.1. Określenie macierzy. Działania na macierzach

Wprowadzenie

Oznaczmy przez M skończony zbiór kolejnych początkowych liczb naturalnych: $M = \{1,2,...,m\}$, a przez N zbiór: $N = \{1,2,...,n\}$. Iloczynem kartezjańskim $M \times N$ jest zbiór wszystkich par uporządkowanych, których pierwszy element należy do zbioru M, a drugi do zbioru N.

Definicja *2.d.1.* ***Macierzą prostokątną*** **A** o m wierszach i n kolumnach oraz elementach z niepustego zbioru P nazywamy każdą funkcję $A: (M \times N) \to P$.

Najczęściej zbiór P jest zbiorem liczbowym i tylko takie macierze będą przedmiotem naszych rozważań.

Zamiast A(i, j) będziemy pisali a_{ij}. Zatem $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{i=1,...,m;\ j=1,...,n}$ lub $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$.

Najwygodniejszą postacią zapisu macierzy jest *tablica prostokątna* z wypisanymi wszystkimi wartościami, np.:

$M = \{1,2,3\}$, $N = \{1,2,3,4\}$, $P = \boldsymbol{Z}$ – zbiór liczb całkowitych.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 7 \end{bmatrix}, \text{ tutaj np. } a_{12} = 1,\ \ a_{23} = 5.$$

W każdej macierzy wyróżniamy wiersze i kolumny.

Liczby: $3 \quad 2 \quad 5 \quad -4$ tworzą drugi wiersz, a liczby $\begin{matrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{matrix}$ trzecią kolumnę.

Liczby, z których zbudowana jest macierz, nazywamy jej ***elementami***. Element a_{ij} znajduje się w i-tym wierszu i j-tej kolumnie macierzy. W powyższej

macierzy **A** element –3 znajduje się w trzecim wierszu i trzeciej kolumnie, zatem $a_{33} = -3$.

Wymiarem macierzy nazywamy iloczyn liczby jej wierszy i kolumn, przy czym *mnożenia się nie wykonuje*. Macierz **A** jest więc wymiaru 3×4 (czyta się: trzy na cztery, a nie: 12), a macierz podana w definicji jest wymiaru $m \times n$.

Macierze będziemy zazwyczaj oznaczali dużymi literami alfabetu łacińskiego: **A**, **B**, **C**,...

Z powyższych rozważań wynika, że sposób ogólny zapisywania macierzy:

$$\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{i=1,...,m;\ j=1,...,n} \quad (\text{lub } \mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{m\times n})$$

można zastąpić postacią:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Będziemy używać obu tych postaci.

Dwie macierze są równe, jeśli mają równe *wszystkie* odpowiednie elementy:

$$\left[a_{ij}\right]_{i=1,...,m;\ j=1,...,n} = \left[b_{ij}\right]_{i=1,...,m;\ j=1,...,n} \Leftrightarrow \ \forall\ i = 1,...,m;\ j = 1,...,n : a_{ij} = b_{ij}.$$

Klasyfikacja macierzy

1. Macierzą ***wierszową*** lub ***wektorem wierszowym*** nazywamy macierz składającą się tylko z jednego wiersza. Macierzą ***kolumnową*** lub ***wektorem kolumnowym*** nazywamy macierz składającą się tylko z jednej kolumny.
2. Macierz $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{i=1,...,m;\ j=1,...,n}$ nazywamy ***kwadratową***, gdy $n = m$, np.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Przekątną główną macierzy kwadratowej nazywamy ciąg *kolejnych* elementów postaci a_{ii}, $i = 1,2,...,n$. W powyższej macierzy przekątną główną tworzą elementy: 2 5 –2.

3. Macierz kwadratową $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{i,j=1,\ldots,n}$ nazywamy ***symetryczną***, gdy $a_{ij} = a_{ji}$, np.:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

W macierzy symetrycznej główna przekątna jest osią symetrii elementów macierzy.

4. Macierz kwadratową $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{i,j=1,\ldots,n}$ nazywamy ***antysymetryczną*** lub ***ukośnie symetryczną***, gdy $a_{ij} = -a_{ji}$, np.:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Uwaga *2.u.1.* W macierzy antysymetrycznej główna przekątna składa się z samych zer.

5. Macierz kwadratową $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{i,j=1,\ldots,n}$ nazywamy ***górnotrójkątną***, gdy $a_{ij} = 0$ dla $i > j$ (pod główną przekątną znajdują się same zera) oraz ***dolnotrójkątną***, gdy $a_{ij} = 0$ dla $i < j$ (nad główną przekątną znajdują się same zera).

Macierz kwadratową $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{i,j=1,\ldots,n}$ nazywamy ***diagonalną***, gdy $a_{ij} = 0$ dla $i \neq j$ (elementy różne od zera mogą występować tylko na głównej przekątnej).

Macierz diagonalną $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{i,j=1,\ldots,n}$ nazywamy ***jednostkową***, gdy $\forall i = 1,2,\ldots,n : a_{ii} = 1$. Macierz jednostkową oznacza się przez **E** lub **I** (w tej książce będziemy używać oznaczenia **E**), lub – by zaznaczyć wymiar – $\mathbf{E}_n$, np. $\mathbf{E}_1 = [1]$,

$$\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. ***Macierzą*** transponowaną macierzy prostokątnej $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{i=1,\ldots,m;\, j=1,\ldots,n}$ nazywamy macierz prostokątną $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = [a_{ji}]_{i=1,\ldots,m;\, j=1,\ldots,n}$, w której pierwszą kolumną jest pierwszy wiersz macierzy **A**, drugą kolumną – drugi wiersz macierzy **A** itd.

Istnieje bardzo wiele zastosowań opisu rzeczywistości za pomocą macierzy. Oto kilka wybranych najprostszych przykładów.

- Elementy macierzy określają dochód firmy (wiersze oznaczają działy zakładu – dział I, II,..., a kolumny kolejne miesiące).
- Elementy macierzy określają obroty sieci sklepów „Prot i Gaweł" (wiersze określają konkretny sklep – przy ul. Płomienistej, Gruntowej, Głogowskiej, Półwiejskiej itd., a kolumny – poszczególne działy tych sklepów – ogólnospożywczy, mięsno-wędliniarski, nabiałowy czy (o zgrozo!) alkoholowy.
- Każdy arkusz kalkulacyjny (np. Excel) jest macierzą.
- Gra w okręty polega na rozszyfrowaniu macierzy przeciwnika (nie jest to macierz liczbowa).
- Sala kinowa przed seansem jest macierzą, której elementami są fotele, numerami wierszy – numery rzędów, a numerami kolumn – numery foteli w rzędzie (ewentualną różnicę w liczbie foteli w różnych rzędach można uzupełnić o zera); w czasie seansu elementami macierzy mogą być widzowie (jeśli film jest kiepski, to część elementów macierzy stanowią widzowie, a część – przeważnie większą – puste fotele).
- Tabela odległości między ważniejszymi miastami jest macierzą kwadratową, w której numery wierszy i kolumn odpowiadają nazwom miast (ten sam numer wiersza i kolumny odpowiada temu samemu miastu i – jeśli $i < j$, to a_{ij} jest długością połączenia kolejowego, a jeśli $i > j$ – długością połączenia drogowego.

Działania na macierzach

1. ***Mnożenie macierzy przez liczbę*** polega na mnożeniu wszystkich elementów tej macierzy przez tę liczbę i odbywa się według wzoru:

$$p \cdot \left[a_{ij}\right]_{i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n} = \left[p \cdot a_{ij}\right]_{i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n},$$

$$\text{np. } 2 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mnożenie to można interpretować jako np. pomnożenie przez współczynnik liczby zatrudnionych w danej placówce w celu obliczenia wydajności całej sieci (tzw. waga).

2. ***Dodawanie macierzy***. Aby dodać dwie macierze, muszą one mieć ten sam wymiar. Dodawanie macierzy polega na dodawaniu odpowiednich elementów tych macierzy wg wzoru:

$$\left[a_{ij}\right]_{i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n} + \left[b_{ij}\right]_{i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n} = \left[a_{ij} + b_{ij}\right]_{i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n},$$

$$\text{np.} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Dodawanie można interpretować jako dodawanie dochodów przedsiębiorstwa (z uwzględnieniem działów i miesięcy) z dwóch filii albo sumę obrotów sieci sklepów „Prot i Gaweł" w dwóch kolejnych miesiącach.

3. ***Mnożenie macierzy przez macierz*** (w sensie Cauchy'ego). ***Warunek wykonalności mnożenia macierzy***: Niech będą dane dwie macierze prostokątne **A** i **B**. Mnożenie **A** · **B** jest wykonalne, jeśli *liczba kolumn macierzy po lewej stronie znaku mnożenia (macierz* **A***) jest równa liczbie wierszy macierzy po prawej stronie znaku mnożenia (macierz* **B***)*. Mnożenie macierzy wykonuje się według następującej reguły:

$$\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n}\ ,\ \ \boldsymbol{B} = \left[b_{jk}\right]_{j=1,\ldots,n;\ k=1,\ldots,r},$$

$$\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C} = \left[c_{ik}\right]_{i=1,\ldots,m;\ k=1,\ldots,r},$$

gdzie $c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$.

Inaczej – element c_{ik} jest wynikiem odpowiedniego pomnożenia *i*-tego wiersza macierzy **A** przez *k*-tą kolumnę macierzy **B**, a „odpowiedniość" polega na tym, że mnoży się pierwszy element wiersza przez pierwszy element kolumny, dodaje się iloczyn drugiego elementu wiersza i drugiego elementu kolumny itd.

Uwaga *2.u.2.* Znak $\sum$ jest symbolem sumowania, pozwalającym na skrócony zapis dodawania wielu elementów w następujący sposób:

$$\sum_{i=2}^{4} (i^2 + 2) = (2^2 + 2) + (3^2 + 2) + (4^2 + 2),$$

$$\sum_{p=3}^{6} \frac{p}{p-1} = \frac{3}{3-1} + \frac{4}{4-1} + \frac{5}{5-1} + \frac{5}{6-1},$$

$$\sum_{j=1}^{5}(j+p)^k = (1+p)^k + (2+p)^k + (3+p)^k + (4+p)^k + (5+p)^k .$$

Z powyższych przykładów wynika, że pod symbolem sumy podany jest wskaźnik, według którego sumujemy, i liczba początkowa sumowania, a nad symbolem sumy podana jest liczba końcowa sumowania. Za znakiem sumy znajduje się wyrażenie, do którego podstawiamy w miejsce wskaźnika, według którego sumujemy, kolejne liczby sumowania – od początkowej do końcowej. Po każdym podstawieniu (z wyjątkiem ostatniego) stawiamy znak „+”. W trzecim z podanych powyżej przykładów w wyrażeniu za znakiem sumy znajduje się kilka liter, ale podstawianie stosuje się tylko do tej litery, która jest wskazana pod znakiem sumy (tu jest to litera *j*); nazywamy ją ***bieżącym indeksem sumowania***.

Przykład *2.p.1*. Wykonać mnożenie macierzy:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2-0-0 & 6-1-5+0 \\ 1+4+0+1 & 3-2+10-2 \\ 1+2+0-3 & 3-1+0+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 9 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Własności mnożenia macierzy

1. Łączność $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$ – oczywiście tylko wtedy, gdy można mnożyć sąsiednie macierze.
2. Mnożenie macierzy na ogół nie jest przemienne; $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.

Przykład *2.p.2*

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 9 & 6 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 3 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, ponieważ $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 9 & 6 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 3 \end{bmatrix}$.

2.1.2. Macierz odwrotna

Załóżmy, że dana jest macierz kwadratowa **A**; zgodnie z powyższymi rozważaniami wykonalne jest mnożenie tej macierzy przez dowolną macierz kwadratową **B** tego samego wymiaru. Postawmy następujący problem: Czy istnieje taka macierz **B**, aby po wykonaniu tego mnożenia otrzymać pewną, z góry określoną macierz, a jeśli istnieje, to w jaki sposób ją znaleźć?

Problem rozpatrywany w zbiorach liczbowych jest Czytelnikowi doskonale znany.

Odpowiednikiem mnożenia macierzy jest mnożenie liczb. Jeśli mamy dwie liczby, np. $\frac{3}{5}$ i $\frac{7}{11}$, to znając regułę mnożenia ułamków, zastosujemy ją i stwierdzimy, że $\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{11}=\frac{21}{55}$. Nieco inaczej jest, gdy znamy jeden z czynników oraz wynik mnożenia, a nie znamy drugiego czynnika. Ale i tu radzimy sobie nieźle, gdyż, jeśli np. $\frac{3}{5}\cdot x=\frac{2}{13}$, to drugi czynnik otrzymamy, mnożąc wynik działania przez odwrotność znanego czynnika: $x=\frac{2}{13}\cdot\frac{5}{3}$, czyli $x=\frac{10}{39}$. Jeśli uświadomimy sobie znane fakty, a mianowicie:

- między liczbą *a* i jej odwrotnością a^{-1} jest taki związek, że $a\cdot a^{-1}=1$;
- istnieje liczba, która nie ma odwrotności – jest to 0;
- „jedynką” w mnożeniu macierzy jest macierz jednostkowa **E**, czyli $\mathbf{E}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{E}=\mathbf{A}$,

to zobaczymy, że problem sprowadza się przede wszystkim do znalezienia odwrotności oraz że analogiczny problem możemy postawić w rachunku macierzy. Prowadzi to nas do ważnej definicji.

Definicja *2.d.2*. Macierz kwadratową **B** nazywamy ***macierzą odwrotną*** do macierzy kwadratowej **A**, gdy $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{E}$. Macierz odwrotną do macierzy **A** oznaczamy: $\mathbf{A}^{-1}$.

Uwaga *2.u.3*

1. Nie każda macierz kwadratowa ma macierz odwrotną. Macierz, która ma macierz odwrotną, nazywamy ***nieosobliwą***, a macierz, która jej nie ma – ***osobliwą***.
2. Odwrotność macierzy jest inwolucją, tzn. $(\mathbf{A}^{-1})^{-1}=\mathbf{A}$ (inwolucją nazywamy przekształcenie, które dwukrotnie, kolejno wykonane na tym samym elemencie powraca do punktu wyjścia; inwolucją jest np. przejście przez drzwi; autorzy serdecznie odradzają sprawdzenie, czy przejście przez okno jest inwolucją).

Wyznaczanie macierzy odwrotnej

Omówimy prostą metodę wyznaczania macierzy odwrotnej, którą nazywamy ***metodą przekształceń elementarnych***. Niektórzy autorzy nazywają ją metodą Gaussa, jeszcze inni metodą Gaussa-Jordana. Ponieważ operacje będą wykonywane *wyłącznie na wierszach*, więc określimy przekształcenia elementarne wierszy macierzy. W dalszej części (nie dotyczącej obliczania macierzy odwrotnych) pojawiają się również działania na kolumnach. Macierz odwrotną można (pod warunkiem odpowiedniego zapisu) obliczać, wykonując działania na kolumnach (ale *tylko* na kolumnach). Dlatego przy opisie działań w nawiasach pojawią się odpowiednie zamienniki.

Przekształceniem elementarnym macierzy nazywamy każde z następujących działań:

1. Pomnożenie wszystkich elementów wiersza (kolumny) przez liczbę różną od zera.
2. Zamiana wierszy (kolumn) miejscami (przestawienie wierszy (kolumn)).
3. Dodanie do elementów dowolnego wiersza (kolumny), odpowiednio, elementów innego wiersza (kolumny) pomnożonych przez dowolną ustaloną liczbę.

Powyższe przekształcenia dokonane na wierszach są równoważne pomnożeniu pewnej odpowiednio dobranej macierzy, zwanej ***macierzą przekształcenia***, przez daną macierz (a działania na kolumnach polegają na pomnożeniu danej macierzy przez macierz przekształcenia). Objaśnimy to na przykładach (macierz przekształcenia jest po lewej stronie znaku mnożenia).

Przykład *2.p.3*

− Pomnożenie drugiego wiersza macierzy przez liczbę a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 \cdot a & -2 \cdot a & 0 \cdot a \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ a & -2a & 0 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

− Zamiana miejscami wierszy drugiego i trzeciego:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

− Dodanie do drugiego wiersza elementów trzeciego wiersza pomnożonych przez liczbę a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0-a & 3+3a & 1+2a \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Metoda przekształceń elementarnych znajdowania macierzy odwrotnej jest konsekwencją poniższego twierdzenia.

Twierdzenie *2.t.1.* Jeżeli macierz jednostkową **E** można otrzymać z macierzy **A** przez pewien ciąg operacji elementarnych na macierzy **A**, to macierz **A** jest nieosobliwa, zaś macierz odwrotna $\mathbf{A}^{-1}$ powstaje w wyniku zastosowania tego samego ciągu operacji elementarnych na macierzy **E**.

Opis metody

1. Wpisujemy macierz złożoną z dwóch bloków – lewą częścią jest macierz **A**, prawą częścią macierz **E**, odpowiedniego wymiaru. Obie części oddzielamy pionową kreską ([**A**|**E**]).
2. Stosujemy przekształcenia elementarne opisane na stronie 48 w punktach 1-3.
3. Celem przekształceń jest doprowadzenie macierzy do takiej postaci, aby po lewej stronie kreski była macierz jednostkowa **E**. Wówczas po prawej stronie kreski będzie macierz $\mathbf{A}^{-1}$ ([**E**|$\mathbf{A}^{-1}$]).

Uwaga *2.u.4.*

1. Jeśli po dokonaniu przekształceń po lewej stronie kreski pojawi się wiersz złożony z samych zer, to macierz odwrotna nie istnieje – **A** jest macierzą osobliwą.
2. Jeśli po dokonaniu przekształceń po prawej stronie kreski pojawi się kolumna złożona z samych zer, to został popełniony poważny błąd (autorzy radzą zacząć liczenie od nowa, bo dalej już nic nie będzie dobrze).

Opisana metoda jest analogonem metody obliczania liczby odwrotnej do danej liczby według zasady:

(1) piszemy daną liczbę a, następnie kreskę pionową, a za kreską 1 (a|1);
(2) mnożymy daną liczbę i 1 przez taką samą liczbę;
(3) mnożenie wykonujemy tak długo, aż z lewej strony kreski pionowej pojawi się 1;
(4) wówczas liczba z prawej strony kreski pionowej jest liczbą odwrotną do danej liczby $(1 \mid a^{-1})$.

Wyliczmy np. liczbę odwrotną do $\frac{14}{15}$:

Ad. (1) $\dfrac{14}{15} \mid 1,$

Ad. (2) $\dfrac{14}{15} \mid 1 \ / \cdot 3 \ \Rightarrow \dfrac{14}{5} \mid 3,$

(wykonano jedną operację, w następnym punkcie – pozostałe),

Ad. (3)

$$\frac{14}{5} \mid 3 \ / \cdot 5 \quad \Rightarrow \quad 14 \mid 15 \ / \cdot \frac{1}{7} \quad \Rightarrow \quad 2 \mid \frac{15}{7} \ / \cdot \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 1 \mid \frac{15}{14},$$

Ad. (4) liczbą odwrotną do liczby $\dfrac{14}{15}$ jest liczba $\dfrac{15}{14}$.

W poniższych przykładach zapis, np.: $w_2' = w_2 + (-2) \cdot w_3$, oznacza, że drugi wiersz „nowej" (czyli przekształconej) macierzy powstał przez dodanie do drugiego wiersza „starej" macierzy trzeciego wiersza „starej" macierzy, pomnożonego przez (–2). Zapis przekształcenia będzie umieszczony obok „starej" macierzy (lub pod nią).

Przykład *2.p.4*. Obliczyć macierz odwrotną do macierzy **A**.

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$;

b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$;

c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$;

d) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 9 & -8 \end{bmatrix}$.

Rozwiązania

a) $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ $\begin{array}{l} w_1' = w_1 \\ w_2' = w_2 + (-2) \cdot w_1 \\ w_3' = w_3 + w_1 \end{array}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{c} w_1' = w_1 + (-2)\cdot w_2 \\ w_2' = w_2 \\ w_3' = w_3 + (-2)\cdot w_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & 1 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{c} w_1' = w_1 + 5\cdot w_3 \\ w_2' = w_2 + (-2)\cdot w_3 \\ w_3' = w_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 30 & -12 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -12 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & 1 \end{array}\right], \qquad \text{zatem } \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 30 & -12 & 5 \\ -12 & 5 & -2 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jeżeli pomnożymy wyliczoną macierz przez macierz **A** i w wyniku tego mnożenia otrzymamy macierz jednostkową **E**, to $\mathbf{A}^{-1}$ obliczyliśmy prawidłowo. Czytelnik bez trudu sprawdzi, że

$$\begin{bmatrix} 30 & -12 & 5 \\ -12 & 5 & -2 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Odpowiedź: Macierzą odwrotną do $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ jest $\begin{bmatrix} 30 & -12 & 5 \\ -12 & 5 & -2 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

b)
$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{c} w_1' = w_1 \\ w_2' = w_2 + w_1 \\ w_3' = w_3 + (-2)\cdot w_1 \\ w_4' = w_4 + (-1)\cdot w_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{c} w_1' = w_1 + (-2)\cdot w_2 \\ w_2' = w_2 \\ w_3' = w_3 + (-2)\cdot w_2 \\ w_4' = w_4 + (-1)\cdot w_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -3 & 3 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} w_1' = w_1 + 3 \cdot w_3 \\ w_2' = w_2 + (-1) \cdot w_3 \\ w_3' = w_3 \\ w_4' = w_4 + w_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 9 & -13 & -8 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 5 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} w_1' = w_1 + (-9) \cdot w_4 \\ w_2' = w_2 + 3 \cdot w_4 \\ w_3' = w_3 + (-2) \cdot w_4 \\ w_4' = w_4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 41 & 19 & -6 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -13 & -6 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 8 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right],$$

zatem $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 41 & 19 & -6 & -9 \\ -13 & -6 & 2 & 3 \\ 8 & 4 & -1 & -2 \\ -6 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Czytelnik bez trudu (prawie) sprawdzi, że iloczyn otrzymanej macierzy i macierzy **A** jest macierzą jednostkową.

Odpowiedź:

Macierzą odwrotną do $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ jest $\begin{bmatrix} 41 & 19 & -6 & -9 \\ -13 & -6 & 2 & 3 \\ 8 & 4 & -1 & -2 \\ -6 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

c)
$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} w_1' = w_1 \\ w_2' = w_2 + w_1 \\ w_3' = w_3 + (-1) \cdot w_1 \\ w_4' = w_4 + (-1) \cdot w_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} w_1' = w_1 \\ w_2' = w_2 + w_4 \\ w_3' = w_3 \\ w_4' = w_4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} w_1' = w_1 + (-2)\cdot w_2 \\ w_2' = w_2 \\ w_3' = w_3 \\ w_4' = w_4 + 2\cdot w_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -9 & -5 & 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 6 & -1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} w_1' = w_1 \\ w_2' = w_2 \\ w_3' = w_3 \\ w_4' = w_4 + 5\cdot w_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -9 & -5 & 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -6 & 2 & 5 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} w_1' = w_1 \\ w_2' = w_2 \\ w_3' = w_4 \\ w_4' = w_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -9 & -5 & 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -6 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} w_1' = w_1 + 9\cdot w_3 \\ w_2' = w_2 + (-5)\cdot w_3 \\ w_3' = w_3 \\ w_4' = w_3 + 2\cdot w_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 49 & -53 & 16 & 45 & 25 \\ 0 & 1 & 0 & -27 & 30 & -9 & -25 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -6 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & -13 & 4 & 11 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{l} w_1' = w_1 + \left(-\frac{49}{12}\right)\cdot w_4 \\ w_2' = w_2 + \frac{9}{4}\cdot w_4 \\ w_3' = w_3 + \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot w_4 \\ w_4' = \frac{1}{12}\cdot w_4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{12} & \frac{1}{3} & \frac{11}{12} & \frac{1}{2} \end{array}\right], \quad \text{zatem } \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{13}{12} & \frac{1}{3} & \frac{11}{12} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Nie trzeba chyba zachęty, aby Czytelnik sprawdził (za pomocą mnożenia macierzy) prawidłowość wyliczenia macierzy odwrotnej. Prawdziwym wyzwaniem będzie tu postanowienie dokonywania wszystkich obliczeń w pamięci.

Odpowiedź:

Macierzą odwrotną do $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ jest $\begin{bmatrix} \frac{1}{12} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{13}{12} & \frac{1}{3} & \frac{11}{12} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

d) $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & -8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ $\begin{array}{l} w_1' = w_1 \\ w_2' = w_2 + (-3)\cdot w_1 \\ w_3' = w_3 + (-1)\cdot w_1 \end{array}$

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 7 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -7 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$ $\begin{array}{l} w_1' = w_1 \\ w_2' = w_2 + w_3 \\ w_3' = w_3 \end{array}$

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

Odpowiedź: Po lewej stronie pionowej kreski pojawił się wiersz złożony z samych zer. Zatem **A** jest macierzą osobliwą – macierz odwrotna nie istnieje.

2.1.3. Rozwiązywanie elementarnych równań macierzowych

Niech będą dane macierze: **A** wymiaru $m \times n$, **X** wymiaru $n \times p$ i **B** wymiaru $m \times p$. Wykonalne jest wówczas mnożenie macierzy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$, a po wykonaniu tego mnożenia możemy sprawdzić, czy prawdziwa jest zależność: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$. Zadanie to staje się problemem, gdy znane są wyłącznie macierze **A** i **B**. Macierz **X** jest wtedy ***niewiadomą***, wyrażenie $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ ***równaniem macierzowym***, a obliczenie takiej macierzy **X** (być może niejednej), która spełnia to równanie – ***rozwiązaniem*** równania macierzowego. W ogólności problem rozwiązania równania sprowadza się do rozwiązania $n \cdot p$ równań liniowych z $n \cdot p$ niewiadomymi (będziemy się tym zajmować w rozdziale następnym). Jeżeli jednak narzucimy na macierze pewne

warunki, to zadanie stanie się możliwe (i nietrudne) do rozwiązania już teraz. Niech macierz **A** będzie kwadratowa i nieosobliwa ($\mathbf{A}^{-1}$ istnieje, **A** jest wymiaru $n \times n$, a wówczas **X** oraz **B** mają ten sam wymiar $n \times p$). Korzystając z własności macierzy (i pamiętając, że mnożenie macierzy na ogół nie jest przemienne), wykonujemy następujące przekształcenia:

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} \quad / \cdot \mathbf{A}^{-1}$ lewostronnie;

$\mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}) = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$ zastosujemy łączność mnożenia macierzy;

$(\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$ skorzystamy z definicji macierzy odwrotnej;

$\mathbf{E} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$ skorzystamy z własności macierzy jednostkowej;

$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$.

Zatem rozwiązaniem równania macierzowego $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ jest macierz $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$.

Wśród równań macierzowych powyższej postaci częściej niż inne spotyka się takie, w których macierz **B** (a więc również **X**) jest wymiaru $n \times n$ (macierz kwadratowa) albo $n \times 1$ (macierz kolumnowa). Jeżeli wszystkie macierze równania są kwadratowe i macierz **A** jest nieosobliwa, to łatwo można znaleźć rozwiązanie równania $\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B}$.

$\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B} \quad / \cdot \mathbf{A}^{-1}$ prawostronnie;

$(\mathbf{X} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1}$ zastosujemy łączność mnożenia macierzy;

$\mathbf{X} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1}$ skorzystamy z definicji macierzy odwrotnej;

$\mathbf{X} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1}$ skorzystamy z własności macierzy jednostkowej;

$\mathbf{X} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1}$.

Zatem rozwiązaniem równania macierzowego $\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B}$ jest macierz $\mathbf{X} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1}$.

Przykład *2.p.5*. Rozwiązać równanie macierzowe:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; b) $\mathbf{X} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Rozwiązania

a) Stosując metody opisane powyżej, musimy najpierw wyliczyć $\mathbf{A}^{-1}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} w_1' = w_1 \\ w_2' = w_2 + (-1)\cdot w_1 \\ w_3' = w_3 + w_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} w_1' = w_1 + (-2)\cdot w_2 \\ w_2' = w_2 \\ w_3' = w_3 + w_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} w_1' = w_1 + 7\cdot w_3 \\ w_2' = w_2 + (-3)\cdot w_3 \\ w_3' = w_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]; \qquad \text{więc } \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zatem $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 7 & 5 \\ -7 & -3 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania macierzowego jest macierz

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 18 & 7 & 5 \\ -7 & -3 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Równanie ma takie same współczynniki jak równanie (a), ale ze względu na nieprzemienność mnożenia macierzy rozwiązania obu równań mogą być różne. Jest to równanie typu $\mathbf{X}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{B}$, zatem $\mathbf{X} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}^{-1}$. Macierz $\mathbf{A}^{-1}$ jest wyliczona powyżej, więc

$$\mathbf{X} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 17 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania macierzowego jest macierz

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 17 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

2.1.4. Zastosowanie rachunku macierzowego

Istnieje wiele zastosowań rachunku macierzowego. Jest on szczególnie przydatny w opisie procesów, które mają wiele zmiennych, a zatem procesów ekonomicznych, biometrycznych, biologicznych, technicznych, fizycznych i – oczywiście – matematycznych. Poniższy przykład jest tylko namiastką możliwości rachunku macierzowego.

Przykład *2.p.6.* Przedsiębiorstwo Produkcji Spinek do Mankietów i Krawatów „Eurospinka" produkuje trzy rodzaje niezawodnych spinek do krawatów, wykonanych ze srebra, miedzi i stali: model I, model II i lux. Zawartość metali (w gramach) w pojedynczej spince przedstawia poniższa tabela.

	model I	model II	lux
miedź	2	1	2
stal	2	1	0
srebro	2	2	2

Zagadnienie 1. Jeżeli cena miedzi jest 0,05 € za 1 gram, cena stali 0,03 € za 1 gram, a cena srebra 0,10 € za gram, to jaki jest jednostkowy koszt materiału poszczególnych modeli?

Na podstawie zamieszczonej tabeli tworzymy macierz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Jeżeli utworzymy wektor wierszowy cen jednostkowych materiałów

$\mathbf{B} = [0{,}05 \quad 0{,}03 \quad 0{,}10]$, to iloczyn macierzy

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = [0{,}05 \quad 0{,}03 \quad 0{,}10] \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = [0{,}36 \quad 0{,}28 \quad 0{,}30]$$

jest wektorem jednostkowych kosztów materiałowych poszczególnych modeli.

Zagadnienie 2. Jaką ilość poszczególnych metali zużyje się na produkcję 500 sztuk modelu I, 600 sztuk modelu II i 150 sztuk modelu lux?

Do rozwiązania tego zagadnienia wystarczy utworzyć wektor kolumnowy

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}500\\600\\150\end{bmatrix};\ \text{iloczyn}\ \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}=\begin{bmatrix}2&1&2\\2&1&0\\2&2&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}500\\600\\150\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1900\\1600\\2500\end{bmatrix}$$

podaje ilości miedzi, stali i srebra (w tej właśnie kolejności) potrzebne do produkcji podanych ilości asortymentu spinek.

Zagadnienie 3. Jaki jest całkowity koszt materiału zużytego do produkcji spinek według podanego powyżej asortymentu?

Aby obliczyć całkowity koszt materiału, wykonujemy iloczyn

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}=\begin{bmatrix}0{,}05&0{,}03&0{,}10\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&1&2\\2&1&0\\2&2&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}500\\600\\150\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}393{,}00\end{bmatrix}.$$

Szanowny Czytelnik sprawdzi, że nie ma znaczenia dla wyniku ani dla wykonalności działań, czy najpierw wykona się mnożenie $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$, czy też $\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$. Koszt całego materiału, przy żądanym asortymencie, wynosi 393 €.

Zagadnienie 4. Firmy X i Y, których pracownicy są zobowiązani nosić krawaty firmowe, zleciły wykonanie spinek do krawatów. Spinki te produkowane są w kompletach.
Komplet dla firmy X składa się z 6 spinek: 2 spinek model I, 1 spinki model II i 3 spinek model lux.
Komplet dla firmy Y składa się z 11 spinek: 5 spinek model II i 6 spinek model lux.
Jakie jest zużycie materiału potrzebnego do wyprodukowania poszczególnych kompletów?

Tworzymy macierz

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}2&0\\1&5\\3&6\end{bmatrix},$$

której wiersze odpowiadają poszczególnym modelom, a kolumny – kompletom dla firm. Wystarczy teraz obliczyć iloczyn macierzy

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{D}=\begin{bmatrix}2&1&2\\2&1&0\\2&2&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&0\\1&5\\3&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11&17\\5&5\\12&22\end{bmatrix},$$

aby odczytać, że na produkcję kompletu dla firmy X potrzeba 11 gramów miedzi, 5 gramów stali i 12 gramów srebra (pierwsza kolumna), a na produkcję kompletu dla firmy Y potrzeba 17 gramów miedzi, 5 gramów stali i 22 gramów srebra.

Zagadnienie 5. W magazynie zostało 2000 gramów miedzi, 1800 gramów stali i 2100 gramów srebra. Czy jest możliwe wykonanie spinek w taki sposób, aby cały materiał został zużyty do produkcji, oczywiście – z zachowaniem normatywnego składu poszczególnych modeli?

Jest to typowe *zagadnienie odwrotne*. Zauważmy, że problem ten podjęto w zagadnieniu 2, tyle że na odwrót. Dlatego do rozwiązania użyjemy macierzy odwrotnej do macierzy **A**, o ile taka macierz istnieje. Metodą przekształceń elementarnych łatwo można wyliczyć

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-1&0&1\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}.$$

Jeśli oznaczymy

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix}2000\\1800\\2100\end{bmatrix},$$

to rozwiązaniem zagadnienia będzie iloczyn macierzy

$$\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{G}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-1&0&1\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2000\\1800\\2100\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}850\\100\\100\end{bmatrix},$$

zatem należy wykonać 850 sztuk modelu I, 100 sztuk modelu II i 100 sztuk modelu lux.

Niestety, mnożenie macierzy nie da odpowiedzi na pytanie „Kto to wszystko kupi?”.

Zadania

***Zadanie** 2.z.1*. Metodą przekształceń elementarnych obliczyć macierz odwrotną do danej macierzy:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 7 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$;

d) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$; f) $\begin{bmatrix} -1 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$;

g) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}$; h) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

***Zadanie** 2.z.2*. Rozwiązać równanie macierzowe $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ dla:

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 6 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$;

c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

***Zadanie** 2.z.3.* Rozwiązać równanie macierzowe $\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B}$ dla:

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 6 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$;

b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 6 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$;

c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Odpowiedzi

Zadanie *2.z.1.*

a) $\begin{bmatrix} 4 & -7 & -5 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 5 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

d) $\begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & 4 \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \\ -3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$; f) $\begin{bmatrix} -7 & 6 & 12 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & -7 \end{bmatrix}$;

g) $\begin{bmatrix} 9 & -5 & 3 & 0 \\ -6 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$; h) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Zadanie *2.z.2.*

a) $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -11 \\ -30 \\ -8 \end{bmatrix}$; b) $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$; c) $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Zadanie *2.z.3.*

a) $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$; b) $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 8 & -3 & -2 \\ -10 & 4 & 3 \\ -34 & 13 & 9 \end{bmatrix}$; c) $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.

2.2. Wyznaczniki

2.2.1. Wyznacznik macierzy kwadratowej i jego własności

Definicja *2.d.3.* Wyznacznikiem macierzy kwadratowej $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{i,\,j=1,\ldots n}$ nazywamy liczbę

$$\det(\mathrm{A}) = \begin{cases} a_{11} & \text{dla} \quad n = 1 \\ \sum\limits_{p} (-1)^{\mathrm{inv}(p)} a_{1p_1} \cdot a_{2p_2} \cdot \ldots \cdot a_{np_n} & \text{dla} \quad n \geq 2 \cdot \end{cases}$$

Suma jest brana po wszystkich $n!$ permutacjach $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ ciągu (1, 2,..., n), inv(p) jest liczbą inwersji w permutacji p, gdzie inwersja oznacza nieporządek, tzn. sytuację, w której liczba większa poprzedza liczbę mniejszą.

Powyższa definicja jest bardzo niepraktyczna w zastosowaniach, to znaczy w obliczeniach wyznacznika macierzy.

Jeśli macierz oznaczamy:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

to jej wyznacznik zapisujemy:

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Metody obliczania wyznaczników

1. Wyznacznik stopnia drugiego

$$\text{Jeśli } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \text{ to } \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

2. Wyznacznik stopnia trzeciego. Dopisujemy z prawej strony dwie pierwsze kolumny lub poniżej – dwa pierwsze wiersze:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\,.$$

Ta metoda nazywa się metodą Sarrusa.

Własności wyznaczników

1. Wyznacznik macierzy diagonalnej jest iloczynem wyrazów głównej przekątnej.
2. Wyznacznik macierzy, w której jeden wiersz lub jedna kolumna składa się z samych zer, jest równy 0.
3. Wyznacznik macierzy jest równy wyznacznikowi jej macierzy transponowanej.
4. Jeśli macierz **B** powstaje z macierzy **A** przez zamianę miejscami dwóch wierszy lub dwóch kolumn, to det(**B**) = – det(**A**).
5. Jeśli w macierzy dwa wiersze lub dwie kolumny są identyczne lub proporcjonalne, to jej wyznacznik jest równy 0.
6. Jeśli macierz **B** powstaje z macierzy **A** przez pomnożenie wszystkich elementów jednego wiersza lub jednej kolumny przez liczbę *c*, to $\det(\mathbf{B}) = c \cdot \det(\mathbf{A})$.
7. Wyznacznik nie zmienia wartości, gdy do wiersza (lub kolumny) dodamy odpowiednie elementy innego wiersza (lub kolumny) pomnożone przez dowolną stałą.

2.2.2. Minor macierzy. Dopełnienie algebraiczne

Definicja *2.d.4.* Niech będzie dana macierz **A** [$n \times$ m] i niech $p \le \min\{m,n\}$. Jeżeli w macierzy **A** skreślimy $m - p$ wierszy i $n - p$ kolumn, to powstanie macierz kwadratowa, której wyznacznik nazywamy ***minorem*** stopnia p macierzy **A**.

Definicja *2.d.5.* Niech będzie dana macierz kwadratowa **A** stopnia $n \times n$. Dla dowolnego, ustalonego elementu a_{ij} tej macierzy skreślamy *i*-ty wiersz i *j*-tą kolumnę w macierzy **A**. Niech M_{ij} będzie minorem macierzy **A**, czyli wyznacznikiem tak właśnie utworzonej macierzy kwadratowej. Dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} macierzy **A** nazywamy liczbę $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

2.2.3. Rozwinięcie Laplace'a

Twierdzenie *2.t.2* (***Laplace'a***). Niech będzie dana macierz kwadratowa **A** stopnia $n \times n$. Wyznacznik macierzy **A** jest równy sumie wszystkich iloczynów elementów dowolnego, ustalonego wiersza (kolumny) i odpowiadającego temu elementowi dopełnienia algebraicznego, to znaczy:

– $\det(\mathrm{A}) = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + ... + a_{in} \cdot A_{in}$ – rozwinięcie według *i*-tego wiersza;

– $\det(\mathrm{A}) = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + ... + a_{nj} \cdot A_{nj}$ – rozwinięcie według *j*-tej kolumny.

Przykład *2.p.7*. Wyliczyć wyznacznik:

a) $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 3(-4) - (-5)(-1) = -17;$

b) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10 - (-12) = 22;$

c) $\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = 5 - 21 = -16.$

Przykład *2.p.8*. Wyliczyć wyznacznik, stosując metodę Sarrusa:

a)

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-1)(-4)(-3) + 310 + (-2)24 - 0(-4)(-2) - 41(-1) - (-3)23 = -6;$$

$$\begin{matrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 4 \end{matrix}$$

b)

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 18 - 4 - (-3) - 16 - (-6) = -4 + 18 - 4 + 3 - 16 + 6 = 27 - 24 = 3.$$

$$\begin{matrix} 2 & -1 & -3 \\ -3 & 1 & 4 \end{matrix}$$

***Przykład** 2.p.9.* Wyliczyć wyznacznik, stosując rozwinięcie Laplace'a według czwartego wiersza

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{4+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+ 0 \cdot (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{4+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2) \cdot (-32) + 5 \cdot (-6) + 0 \cdot 18 + 1 \cdot (-34) = 64 - 30 - 34 = 0 .$$

Wyznaczniki trzeciego stopnia otrzymane z rozwinięcia danego wyznacznika obliczamy tak jak w przykładzie 2.p.8.

W powyższym przykładzie można zauważyć, że rozwijanie wyznacznika względem wiersza lub kolumny zawierającej zero jest korzystne, ponieważ zmniejsza liczbę wyliczanych wyznaczników (gdyż pomnożenie zera przez dowolną liczbę daje w wyniku zero).

Radzimy: Aby ułatwić obliczanie wyznaczników, należy w wybranym wierszu lub kolumnie utworzyć maksymalnie dużo zer (najlepiej – same zera z wyjątkiem jednego elementu).

Autorzy są przekonani, że Czytelnik, mając za sobą „trening" w postaci obliczania macierzy odwrotnych, łatwo sobie poradzi z „tworzeniem zer" (korzystając z własności wyznaczników).

***Przykład** 2.p.10.* Wyliczyć wyznacznik z uwzględnieniem własności wyznaczników:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 24 & -3 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & -4 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} k_1' = k_1 \\ k_2' = k_2 + (-3) \cdot k_6 \\ k_3' = k_3 \\ k_4' = k_4 \\ k_5' = k_5 + (-4) \cdot k_6 \\ k_6' = k_6 \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -8 & 1 & -1 & -10 & 3 \\ -1 & 30 & -3 & 1 & 7 & -2 \\ 1 & -4 & 2 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 5 & -1 & -1 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)\cdot(-1)^{12}\cdot \begin{vmatrix} 2 & -8 & 1 & -1 & -10 \\ -1 & 30 & -3 & 1 & 7 \\ 1 & -4 & 2 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ -1 & 5 & -1 & -1 & 9 \end{vmatrix} \qquad \begin{aligned} w_1' &= w_1 + (-1)\cdot w_4 \\ w_2' &= w_2 + 3\cdot w_4 \\ w_3' &= w_3 + (-2)\cdot w_4 = \\ w_4' &= w_4 \\ w_5' &= w_5 + w_4 \end{aligned}$$

(przekształcony wyznacznik rozwinięto względem szóstego wiersza, a w otrzymanym wyznaczniku znowu „tworzymy zera” – otrzymujemy nowy wyznacznik, który rozwijamy względem trzeciej kolumny)

$$= -1\cdot \begin{vmatrix} 3 & -7 & 0 & 0 & -7 \\ -4 & 27 & 0 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & 0 & 4 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ -2 & 4 & 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 1\cdot(-1)^7 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -7 & 0 & -7 \\ -4 & 27 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & 4 & 3 \\ -2 & 4 & -2 & 6 \end{vmatrix} =$$

(teraz przed wyznacznik wyłączamy 2, bo wszystkie elementy czwartego wiersza są liczbami parzystymi)

$$= 2\cdot \begin{vmatrix} 3 & -7 & 0 & -7 \\ -4 & 27 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \qquad \begin{aligned} w_1' &= w_1 \\ w_2' &= w_2 + (-2)\cdot w_4 \\ w_3' &= w_3 + 4\cdot w_4 \\ w_4' &= w_4 \end{aligned} \qquad = 2\cdot \begin{vmatrix} 3 & -7 & 0 & -7 \\ -2 & 23 & 0 & -8 \\ -1 & 6 & 0 & 15 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

(otrzymany wyznacznik rozwijamy względem trzeciej kolumny i otrzymujemy)

$$= 2\cdot(-1)\cdot(-1)^7 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -7 & -7 \\ -2 & 23 & -8 \\ -1 & 6 & 15 \end{vmatrix} = \qquad \begin{aligned} w_1' &= w_1 + 3\cdot w_3 \\ w_2' &= w_2 + (-2)\cdot w_3 \\ w_3' &= w_3 \end{aligned} \qquad = 2\cdot \begin{vmatrix} 0 & 11 & 38 \\ 0 & 11 & -38 \\ -1 & 6 & 15 \end{vmatrix} =$$

(otrzymany wyznacznik rozwijamy względem pierwszej kolumny; otrzymujemy)

$$=2\cdot(-1)\cdot(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}11 & 38\\ 11 & -38\end{vmatrix}=-2\cdot 11\cdot 38\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=1672.$$

Zadania

Zadanie *2.z.4.* Obliczyć wyznacznik:

a) $\begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\ -2 & -2 & 1\\ 2 & 3 & 2\end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ -2 & -2 & -3\\ 3 & 9 & 2\end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 2\\ -2 & 1 & 2\end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix}-2 & 2 & 3\\ -2 & 3 & 3\\ 2 & -2 & -2\end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix}2 & 1 & 2 & 1\\ -1 & -2 & 0 & -1\\ 2 & 2 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix}1 & 3 & 1 & -1 & 1\\ -2 & -5 & -3 & 3 & 0\\ -1 & -3 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 6 & 2 & -1 & 1\\ -2 & -6 & -2 & 2 & -1\end{vmatrix}$.

Odpowiedzi: a) 2; b) –2; c) –6; d) –2; e) –1; f) 2.

2.2.4. Osobliwość i nieosobliwość macierzy. Rząd macierzy

Związek wyznacznika macierzy z jej nieosobliwością:

– macierz nieosobliwa to macierz, której wyznacznik jest różny od 0;
– macierz osobliwa to macierz, której wyznacznik jest równy 0.

Definicja *2.d.6.* Mówimy, że macierz $\mathbf{A}(m\times n)$ ma ***rząd r***, $r = \mathrm{rg}(A)$, jeśli istnieje minor M stopnia r macierzy $\mathbf{A}$, który jest różny od 0 ($M \neq 0$), a każdy minor stopnia większego od r (jeśli istnieje) ma wyznacznik równy 0.

Tak sformułowana definicja rzędu macierzy ma tylko jedną pozytywną cechę – jest prawidłowa; niestety, jest również *bardzo nieefektywna* w zastosowaniach. Istnieje bardziej efektywny sposób obliczania rzędu macierzy.

Przykład *2.p.11.* Niech będą dane trzy macierze kolumnowe:

$$a=\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 2\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}-3\\ 1\\ 4\end{bmatrix}\text{ oraz }\ c=\begin{bmatrix}-2\\ -6\\ 16\end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że

$$4\cdot a+2\cdot b=4\cdot\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix}+2\cdot\begin{bmatrix}-3\\1\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-8\\8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-6\\2\\8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\-6\\16\end{bmatrix}=c\,.$$

Zatem macierz (wektor kolumnowy) *c* można przedstawić za pomocą sumy macierzy *a* oraz *b*, przy czym każda z nich została uprzednio pomnożona przez pewną (niekoniecznie tę samą) liczbę. O macierzy *c* mówimy, że jest ***kombinacją liniową*** macierzy *a* i *b* lub że jest ***liniowo zależna*** od macierzy *a* i *b*.

Rozważmy teraz inną trójkę wektorów kolumnowych:

$$k=\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix},\quad l=\begin{bmatrix}3\\2\\0\end{bmatrix}\ \text{i}\ m=\begin{bmatrix}5\\3\\2\end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że wektora *m* nie można przedstawić w postaci kombinacji liniowej wektorów *k* i *l* (np. trzecia współrzędna (liczba 2) nie może być przedstawiona w postaci kombinacji liniowej zer). O wektorze *m* mówimy, że jest ***liniowo niezależny*** od wektorów *k* i *l*.

Każdą macierz prostokątną możemy interpretować jako „zespół" kolumn lub „zespół" wierszy.

Definicja 2.d.7. ***Rzędem macierzy*** prostokątnej $\mathbf{A}(m\times n)$ nazywamy maksymalną liczbę jej liniowo niezależnych wierszy lub kolumn.

Obliczanie rzędu macierzy

1. Wykonujemy operacje elementarne na wierszach lub kolumnach macierzy.
2. Celem operacji jest doprowadzenie macierzy do postaci macierzy jednostkowej. Liczba wierszy (albo kolumn) macierzy jednostkowej jest równa szukanemu rzędowi macierzy.
3. Jeśli w trakcie operacji pojawią się dwa jednakowe lub proporcjonalne wiersze (kolumny), to jeden z nich skreślamy. Jeżeli pojawi się wiersz (kolumna) złożony z samych zer, to go skreślamy.

Przykład *2.p.12.* Obliczyć rząd macierzy

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 7 & 1 & 8 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & 7 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie:

$$R(\mathbf{A})=R\begin{bmatrix} 7 & 1 & 8 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & 7 & -1 \end{bmatrix}\begin{matrix} w_1' = w_1 + (-2)\cdot w_2 + (-1)\cdot w_3 \\ w_2' = w_2 + 2\cdot w_4 \\ w_3' = w_3 + 3\cdot w_4 \\ w_4' = (-1)\cdot w_4 \\ w_5' = w_5 + (-1)\cdot w_3 \end{matrix} =$$

$$= R\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & -5 \\ 0 & 5 & 5 & -5 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & -5 \end{bmatrix}\begin{matrix} w_2' = \frac{1}{5}\cdot w_2 \\ \\ \\ w_4' = w_4 \\ \\ \end{matrix} \quad (\text{skreślamy } w_1, w_3, w_5) =$$

$$= R\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{matrix} k_2' = k_2 + 2\cdot k_1 \\ k_3' = k_3 + k_1 \\ k_4' = k_4 + (-3)\cdot k_1 \end{matrix} =$$

$$= R\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{matrix} w_1' = w_2 \\ w_2' = w_1 \end{matrix} \ (\text{skreślamy } k_3, k_4) = R\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2.$$

Zadania

Zadanie *2.z.5.* Wyliczyć rząd macierzy:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & -1 \\ -2 & -2 & -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$;

c) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Odpowiedzi: a) 3; b) 4; c) 4.

2.3. Układy równań liniowych

2.3.1. Układ Cramera. Wzory Cramera

Równaniem liniowym z n niewiadomymi nazywamy równanie postaci $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$. Jeżeli $b = 0$, to równanie liniowe nazywamy równaniem jednorodnym. Ma ono zawsze co najmniej jedno rozwiązanie:

$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

Układem n równań liniowych z n niewiadomymi nazywamy układ:

$$(*) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

Macierzą współczynników układu (*) n równań liniowych z n niewiadomymi (czasem: macierzą układu) nazywamy macierz:

$$\mathbf{A} = \left[a_{jk}\right]_{j,k=1,\ldots,n} ;$$

jest to macierz kwadratowa. Układ (*) nazywamy układem Cramera, jeśli wyznacznik det ($\mathbf{A}$) $\neq 0$. Układ ten można zapisać w postaci równania macierzowego $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{Y}$, gdzie:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Wzory Cramera

Metoda Cramera – niech $\mathbf{A}_i$ będzie macierzą $(n\times n)$ powstającą z macierzy **A** przez zastąpienie w niej *i*-tej kolumny wektorem kolumnowym **Y**.

Twierdzenie *2.t.3.* Układ Cramera ma dokładnie jedno rozwiązanie:

$$x_i = \frac{\det \mathbf{A}_i}{\det \mathbf{A}} \quad i = 1,2,...,n.$$

2.3.2. Macierz uzupełniona układu równań. Twierdzenie Kroneckera-Capellego. Liczba rozwiązań układu równań liniowych

Układem *m* równań liniowych z *n* niewiadomymi nazywamy układ:

$$(**) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{mn1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Macierzą uzupełnioną układu równań liniowych nazywamy macierz $\mathbf{A}^u$ powstałą z macierzy **A** (macierzy współczynników układu) przez dopisanie $(n+1)$-tej kolumny wyrazów wolnych.

$$\mathbf{A}^u = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie *2.t.4.* **(Kroneckera-Capellego)**. **A**by układ równań liniowych miał rozwiązanie, potrzeba i wystarcza, aby rząd macierzy **A** był równy rzędowi macierzy uzupełnionej $\mathbf{A}^u$:

$$R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}^u).$$

Liczba rozwiązań układu równań liniowych

Niech układ (**) spełnia twierdzenie Kroneckera-Capellego i niech

$$r = R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}^u).$$

Jeśli $r = n$, to obliczając rząd macierzy **A**, wykreślono $m - n$ (czyli $m - r$) wierszy, a każdy z nich reprezentował określone równanie układu. Po wykreśleniu odpowiadających tym (wykreślonym) wierszom równań otrzymujemy układ Cramera.

Jeśli $r < n$, to licząc rząd macierzy **A**, wykreślono $m - r$ wierszy i $n - r$ kolumn. Każdy z wykreślonych wierszy reprezentował określone równanie układu, a każda z wykreślonych kolumn – określoną zmienną. Wykreślamy odpowiadające tym wierszom równania, natomiast zmienne odpowiadające wykreślonym kolumnom traktujemy jako parametry rozwiązania. Jeśli teraz w każdym (nieskreślonym) równaniu przeniesiemy owe zmienne na drugą stronę znaku równości (pamiętając o zmianie znaku na przeciwny), to otrzymamy układ Cramera ($r \times r$). Stosowanie przy dwóch i więcej parametrach wzorów Cramera jest jednak bardzo kłopotliwe i autorzy *usilnie* proponują stosowanie metody opisanej w następnym punkcie.

Tabela 2.1.

Rzędy macierzy	Nazwa układu równań	Liczba rozwiązań	Komentarz
$R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}^u) = r$ oraz $r = n$	układ niezależny	jedno	Obliczając rząd macierzy **A**, wykreślono $m - n$ (czyli $m - r$) wierszy, a każdy z nich reprezentował określone równanie układu. Po wykreśleniu odpowiadających tym (wykreślonym) wierszom równań otrzymujemy układ Cramera.
$R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}^u) = r$ oraz $r < n$	układ zależny	nieskończenie wiele	Obliczając rząd macierzy **A**, wykreślono $m - r$ wierszy i $n - r$ kolumn. Każdy z wykreślonych wierszy reprezentował określone równanie układu, a każda z wykreślonych kolumn – określoną zmienną. Wykreślamy odpowiadające tym wierszom równania, natomiast zmienne odpowiadające wykreślonym kolumnom traktujemy jako parametry rozwiązania. Jeśli teraz w każdym (nieskreślonym) równaniu przeniesiemy owe zmienne na drugą stronę znaku równości (pamiętając o zmianie znaku na przeciwny), to otrzymamy układ Cramera ($r \times r$).
$r = R(\mathbf{A}) < R(\mathbf{A}^u)$	układ sprzeczny	brak	Nie są spełnione założenia twierdzenia Kroneckera-Capellego

2.3.3. Rozwiązanie układu równań liniowych metodą eliminacji Gaussa

Metoda eliminacji Gaussa jest metodą rachunku macierzy. W sposób oczywisty przypomina metodę obliczania macierzy odwrotnej. Jednak uważny czytelnik bez trudu zrozumie, że w gruncie rzeczy wszystkie operacje odpowiadają znanym ze szkoły średniej (podstawowej?) działaniom mnożenia równania przez liczbę i dodawania równań stronami.

Opis metody

– wypisujemy macierz uzupełnioną układu, oddzielając macierz wyrazów wolnych pionową kreską;
– wykonując opisane poniżej operacje, doprowadzamy macierz układu do postaci, w której poniżej elementów postaci a_{ii} są same zera, a elementy postaci a_{ii} są różne od zera.

Jeżeli w trakcie wykonywanych operacji pojawi się wiersz złożony z samych zer, to go wykreślamy.

Jeżeli w trakcie wykonywanych operacji pojawi się wiersz złożony z samych zer z lewej strony kreski i z liczby różnej od zera po prawej stronie kreski, to układ jest sprzeczny. To stwierdzenie kończy rozwiązywanie równania.

Dozwolone operacje

– działać można tylko na wierszach,
– wiersze można zamieniać miejscami,
– wiersz można pomnożyć lub podzielić przez dowolną liczbę różną od zera,
– do danego wiersza można dodać inny wiersz pomnożony przez stałą.

Jeżeli liczba kolumn po lewej stronie kreski jest większa od liczby wierszy, to różnica między tymi liczbami jest liczbą parametrów równania, a „nadliczbowe" kolumny są reprezentantami zmiennych, które staną się parametrami.

Przykład *2.p.13.* Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + 2\cdot x_2 + 3\cdot x_3 + 4\cdot x_4 = 5 \\ 2\cdot x_1 + x_2 + 2\cdot x_3 + 3\cdot x_4 = 1 \\ 3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + x_3 + 2\cdot x_4 = 1 \\ 4\cdot x_1 + 3\cdot x_2 + 2\cdot x_3 + x_4 = -5 \end{cases}.$$

Wpisujemy macierz uzupełnioną układu i rozwiązujemy:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & -5 \end{array}\right] \begin{array}{c} w_1' = w_1 \\ w_2' = w_2 + (-2)\cdot w_1 \\ w_3' = w_3 + (-1)\cdot(w_1 + w_2) \\ w_4' = w_4 + (-2)\cdot w_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -4 & -5 & -9 \\ 0 & -1 & -4 & -5 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & -7 \end{array}\right] \begin{array}{l} w_1' = w_1 + 2\cdot w_3 \\ w_2' = w_4 \\ w_3' = w_3 + w_4 \\ w_4' = w_2 + 3\cdot w_4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -5 & -6 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & -6 & -10 & -12 \\ 0 & 0 & -10 & -20 & -30 \end{array}\right] \begin{array}{l} w_1' = w_1 \\ w_2' = w_2 \\ w_3' = \left(-\frac{1}{10}\right)\cdot w_4 \\ w_4' = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot w_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -5 & -6 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{l} w_1' = w_1 \\ w_2' = w_2 \\ w_3' = w_3 \\ w_4' = w_4 + (-3)\cdot w_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -5 & -6 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} w_1' = w_1 \\ w_2' = w_2 \\ w_3' = w_3 \\ w_4' = (-1)\cdot w_4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -5 & -6 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Rozwiązujemy układ „od dołu” macierzy. Ostatnie równanie układu zostało przekształcone do postaci: $0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 1\cdot x_4 = 3$; odczytujemy $x_4 = 3$; następnie $x_3 + 2\cdot x_4 = 3$, czyli $x_3 + 2\cdot 3 = 3$, więc $x_3 = -3$. Z drugiego wiersza

mamy: $1\cdot x_2 - 2\cdot x_3 - 5\cdot x_4 = -7$, czyli $1\cdot x_2 - 2\cdot(-3) - 5\cdot 3 = -7$, skąd łatwo wyliczamy $x_2 = 2$. Wreszcie – z pierwszego wiersza macierzy odczytujemy: $x_1 + 0\cdot x_2 - 5\cdot x_3 - 6\cdot x_4 = -5$; po podstawieniu wyliczonych już wartości zmiennych mamy: $x_1 - 5\cdot(-3) - 6\cdot 3 = -5$, czyli $x_1 = -2$.

Odpowiedź: Rozwiązaniem powyższego układu równań jest:

$$\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -3 \\ x_4 = 3 \end{cases}.$$

Przykład *2.p.14.* Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} 2\cdot x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3\cdot x_1 - 2\cdot x_2 + 2\cdot x_3 - 3\cdot x_4 = 2 \\ 5\cdot x_1 + x_2 - x_3 + 2\cdot x_4 = -1 \\ 2\cdot x_1 - x_2 + x_3 - 3\cdot x_4 = 4 \end{cases}.$$

Wpisujemy macierz uzupełnioną układu i rozwiązujemy:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{c} w_1' = w_1 \\ w_2' = w_2 + (-1)\cdot w_1 \\ w_3' = w_3 + (-1)\cdot(w_1 + w_2) \\ w_4' = w_4 + (-1)\cdot w_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{c} w_1' = w_2 \\ w_2' = w_1 + (-2)\cdot w_2 \\ w_3' = w_3 + w_4 \\ w_4' = w_4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & -7 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 3 \end{array}\right].$$

Z postaci wiersza trzeciego wynika, że układ jest sprzeczny.

Odpowiedź: Powyższy układ jest sprzeczny (rozwiązanie nie istnieje).

Przykład *2.p.15*. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} x_1 - 2\cdot x_2 + 3\cdot x_3 - 4\cdot x_4 = 4 \\ \quad x_2 - \quad x_3 + \quad x_4 = -3 \\ x_1 + 3\cdot x_2 \qquad - 3\cdot x_4 = 1 \\ -7\cdot x_2 \; + \; 3\cdot x_3 \; + x_4 = -3 \end{cases}.$$

Wpisujemy macierz uzupełnioną układu i rozwiązujemy:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} w_1' = w_1 \\ w_2' = w_2 \\ w_3' = w_3 + (-1)\cdot w_1 \\ w_4' = w_4 + 7\cdot w_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{array}\right] \begin{array}{l} w_1' = w_1 \\ w_2' = w_2 \\ w_3' = w_3 + (-5)\cdot w_2 \\ w_4' = (-\frac{1}{4})\cdot w_4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{l} w_1' = w_1 \\ w_2' = w_2 \\ \\ w_4' = w_4 \end{array}$$ (wiersze w_3 i w_4 są proporcjonalne, skreślamy w_3)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \end{array}\right].$$

Układ równań po przekształceniach ma mniej równań niż niewiadomych. Niektóre zmienne zostaną potraktowane jako parametry, czyli będą przybierały dowolną wartość. Musimy te zmienne określić i podać rozwiązanie układu równań. Z postaci macierzy wynika, że wygodnie jest przyjąć zmienną x_4 jako parametr (gdybyśmy przyjęli zamiast x_4 zmienną x_3, też byłoby dobrze).

Niech więc $x_4 = a$ (zaleca się, aby z chwilą podjęcia decyzji, które zmienne będą parametrami, wprowadzić oznaczenie wyróżniające te zmienne).

Z ostatniego wiersza przekształconej macierzy wynika, że $x_3 - 2 \cdot a = 6$, stąd $x_3 = 6 + 2 \cdot a$. Z następnego wiersza mamy: $x_2 - x_3 + a = -3$, czyli $x_2 - (6 + 2a) + a = -3$, zatem $x_2 = 3 + a$. Wreszcie – z pierwszego wiersza wynika, że $x_1 - 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 - 4 \cdot a = 4$, a dalej: $x_1 - 2 \cdot (3 + a) + 3 \cdot (6 + 2a) - 4a = 4$, $x_1 - 6 - 2 \cdot a + 18 + 6 \cdot a - 4a = 4$, czyli $x_1 = -8$.

Układ rozwiązań zawierający wszystkie zmienne i wszystkie parametry oznaczone literami nazywamy ***ogólnym układem rozwiązań***. Jeżeli wszystkie parametry przyrównamy do zera, to taki układ nosi nazwę ***fundamentalnego układu rozwiązań***, natomiast jeśli w miejsce parametrów podstawimy dowolną ustaloną liczbę, to otrzymamy ***szczególny układ rozwiązań***.

Odpowiedź: W powyższym przykładzie możemy podać wszystkie postaci układów rozwiązań.

układ ogólny: układ fundamentalny: układ szczególny, np. dla $a = 3$:

$$\begin{cases} x_1 = -8 \\ x_2 = 3 + a \\ x_3 = 6 + 2 \cdot a \\ x_4 = a \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = -8 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 6 \\ x_4 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = -8 \\ x_2 = 6 \\ x_3 = 12 \\ x_4 = 3 \end{cases}.$$

Przykład *2.p.16*. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2 \cdot x_5 = 0 \\ 3 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 - 3 \cdot x_4 + 4 \cdot x_5 = 2 \\ 4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 - 5 \cdot x_3 - 5 \cdot x_4 + 7 \cdot x_5 = 3 \end{cases}.$$

Wpisujemy macierz uzupełnioną układu i rozwiązujemy:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{c} w_1' = w_2 \\ w_2' = w_1 + (-2) \cdot w_2 \\ w_3' = w_3 + (-1) \cdot (w_1 + w_2) \\ w_4' = w_4 + (-2) \cdot w_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 5 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} w_1' = w_1 + \frac{1}{3} \cdot w_2 \\ w_2' = \frac{1}{3} \cdot w_2 \end{array} \quad \text{(skreślamy } w_3 \text{ i } w_4\text{)}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 & -1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right].$$

Trzy zmienne: x_3, x_4 oraz x_5 określamy jako parametry, wprowadzając ich nowe oznaczenia: $x_3 = a$, $x_4 = b$, $x_5 = c$. Otrzymamy wtedy z drugiego wiersza: $0 \cdot x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + \frac{5}{3} \cdot x_5 = \frac{1}{3}$, czyli

$$x_2 = \frac{1 + 3 \cdot a + 3 \cdot b - 5 \cdot c}{3},$$

a z pierwszego wiersza przekształconej macierzy:

$$x_1 = \frac{1 + c}{3}.$$

Odpowiedź:

układ ogólny:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1+c}{3} \\ x_2 = \dfrac{1+3\cdot a+3\cdot b-5\cdot c}{3} \\ x_3 = a \\ x_4 = b \\ x_5 = c \end{cases},$$

układ fundamentalny:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{3} \\ x_2 = \dfrac{1}{3} \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases},$$

układ szczególny, np. dla $a = 1$, $b = 7$, $c = 2$:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 5 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 7 \\ x_5 = 2 \end{cases}.$$

Zadania

Zadanie *2.z.6.* Rozwiązać układ równań metodą eliminacji Gaussa:

a) $\begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ 2x + 5y + 3z = 12 \\ x - 3y + 4z = -5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + 2y - z = 5 \\ 2x - y + z = -3 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 4 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x-y+z=2 \\ 2x+y-3z=2 \\ x+2y+z=5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x-2y-z=2 \\ x+y-2z=-6 \\ 2x+y+z=0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+y-3z=5 \\ 2x-y+z=0 \\ x+3y+z=3 \end{cases}$;

g) $\begin{cases} x+2y-z+t=3 \\ -x-y+2z-2t=0 \\ 2x+6y+z-t=13 \\ x+y+\quad t=4 \end{cases}$; h) $\begin{cases} x+2y-z+t=0 \\ 3x+7y-z+4t=1 \\ x+3y+2z+3t=3 \\ 2x+6y+3z+5t=4 \end{cases}$; i) $\begin{cases} x+2y+z-2t=1 \\ 2x+5y+z+t=3 \\ x+y+3z-t=2 \\ 4x+8y+5z-2t=5 \end{cases}$.

Odpowiedzi:

a) $x = 1, y = 2, z = 0$; b) $x = 0, y = 2, z = -1$; c) $x = -1, y = 0, z = 2$;

d) $x = 2, y = 1, z = 1$; e) $x = 0, y = -2, z = 2$; f) $x = 1, y = 1, z = -1$;

g) $x = 0, y = 2, z = 3, t = 2$; h) $x = -4a + 8, y = a - 3, z = -a + 2, t = a$;

i) układ sprzeczny.

2.4. Rachunek wektorowy

W naukach technicznych stosuje się dwa rodzaje wielkości: ***skalarne*** i ***wektorowe***.

Skalarem jest liczba określająca ilość jednostek „czegoś” np. 13°C, 35 g, 97 m itd.

Definicja *2.d.8*. ***Wektorem*** nazywamy uporządkowaną parę punktów. Pierwszy z nich nazywamy początkiem, a drugi – końcem wektora.

Powyższa definicja, mimo swojej ogólności (a może właśnie z tego powodu), nie całkiem oddaje intuicyjne pojęcie wektora. Na nasze potrzeby wygodnie będzie użyć określeń, z których powstało ogólne (choć bywają jeszcze bardziej ogólne) pojęcie wektora, a które wiążą się z jego wizualizacją.

Mówimy zatem, że wektorem jest skierowany odcinek, który ma początek, zwany punktem zaczepienia, i koniec. To uporządkowanie nazywamy zwrotem i graficznie przedstawiamy w postaci strzałki umieszczonej na końcu wektora.

Aby określić wektor, musimy znać jego:

– kierunek (prosta, na której wektor leży – zbiór prostych równoległych);
– długość (wartość);
– zwrot (jeden z dwóch możliwych wskazany strzałką).

W zbiorze wektorów określmy relację: dwa wektory należą do relacji (są ze sobą w relacji) wtedy i tylko wtedy, gdy mają tę samą długość, kierunek i zwrot. Łatwo zauważamy, że relacja ta jest zwrotna, symetryczna i przechodnia. Jest to zatem relacja równoważności. Z *zasady abstrakcji* (patrz rozdział 1) wynika, że relacja ta wyznacza podział całego zbioru wektorów na klasy abstrakcji wektorów równoważnych – niepuste i rozłączne. Każdą z takich klas abstrakcji nazywamy ***wektorem swobodnym***. Wektor swobodny ma długość, kierunek i zwrot (a nie ma początku ani końca). Jeżeli jednak wybierzemy punkt początkowy (według naszej woli lub potrzeb), to dany wektor swobodny uzyska nie tylko początek, ale i koniec i – jako *reprezentant* klasy abstrakcji – stanie się ***wektorem związanym***, stosowanym np. w wytrzymałości materiałowej. Wektor, którego początek i koniec się pokrywają, nazywamy wektorem zerowym.

Przykładami wektorów są: wektor siły, wektor prędkości, wektor „ucieczki" ciepła z budynku itd.

W tym rozdziale będą rozpatrywane przede wszystkim wektory swobodne. Do ich oznaczania użyjemy liter alfabetu łacińskiego ze strzałką (autorzy postarają się używać liter z końca alfabetu) np. $\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}}$. Liczby (skalary) będą oznaczane literami alfabetu łacińskiego (z początku alfabetu) bez strzałki, np. a, b; miary kątów między wektorami – literami alfabetu greckiego, np. α, β.

Działania na wektorach

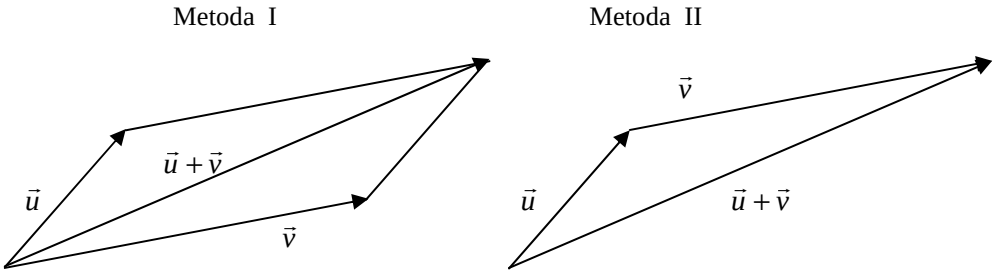
– mnożenie wektora przez liczbę,
– dodawanie wektorów,
– iloczyn skalarny (skalarowy) wektorów,
– iloczyn wektorowy wektorów,
– iloczyn mieszany wektorów.

Mnożenie wektora przez liczbę (skalar) polega na tym, że *wynikiem* działania jest wektor określony następująco:

– kierunek wyniku nie ulega zmianie,
– długość otrzymamy przez mnożenie długości wektora przez bezwzględną wartość tej liczby (skalara),
– zwrot wyniku nie zmieni się, gdy liczba, przez którą mnożymy, jest dodatnia, natomiast zmieni się na przeciwny (zmiana grotu strzałki), gdy wymieniona poprzednio liczba jest ujemna.

W taki sam sposób wykonuje się mnożenie liczby przez wektor.

Dodawanie wektorów przedstawimy graficznie (rys. 2.1).



Rysunek 2.1

Iloczyn skalarny (skalarowy) wektorów:

$$\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = \left|\vec{\boldsymbol{u}}\right| \cdot \left|\vec{\boldsymbol{v}}\right| \cdot \cos\alpha ,$$

gdzie $\left|\vec{\boldsymbol{p}}\right|$ oznacza długość wektora $\vec{\boldsymbol{p}}$, α – kąt między wektorami $\vec{\boldsymbol{u}}$ i $\vec{\boldsymbol{v}}$.

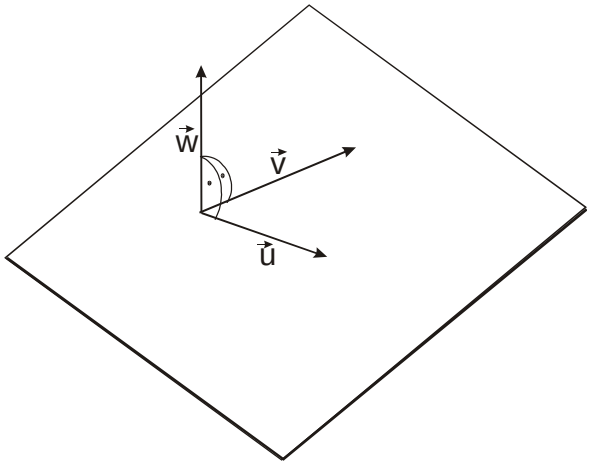
Iloczyn wektorowy wektorów. Niech $\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{w}}$, gdzie $\times$ jest znakiem iloczynu wektorowego wektorów. Aby wyznaczyć wektor $\vec{\boldsymbol{w}}$ (wynik iloczynu $\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}}$), określamy jego kierunek, długość i zwrot.

Kierunkiem wektora $\vec{\boldsymbol{w}}$ jest prosta prostopadła do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory $\vec{\boldsymbol{u}}$ i $\vec{\boldsymbol{v}}$.

Długością wektora jest liczba określona wzorem

$$\left|\vec{\boldsymbol{w}}\right| = \left|\vec{\boldsymbol{u}}\right| \cdot \left|\vec{\boldsymbol{v}}\right| \cdot \sin\alpha .$$

Zwrot wektora jest tak dobrany, aby przy obrocie śrubą prawoskrętną od wektora $\vec{\boldsymbol{u}}$ do wektora $\vec{\boldsymbol{v}}$ (obrót nie większy od 180°) wektor $\vec{\boldsymbol{w}}$ wskazał kierunek jej wkręcania (rys. 2.2).



Rysunek 2.2

Iloczyn mieszany wektorów:

$$\vec{u}\,\vec{v}\,\vec{w} \overset{\text{def}}{=} (\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}).$$

Twierdzenie *2.t.5.* Jeżeli dane są wektory swobodne $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, ..., \vec{u}_n$ (niekoniecznie leżące na jednej płaszczyźnie), to aby uzyskać wektor, który będzie ich sumą, postępujemy w następujący sposób: wybieramy dowolny, ustalony punkt, oznaczamy go *A* i zaczepiamy w nim wektor $\vec{u}_1$ (który staje się w tym momencie wektorem związanym), następnie w końcu tego wektora zaczepiamy wektor $\vec{u}_2$ (który, oczywiście, również staje się wektorem związanym), w jego końcu zaczepiamy wektor $\vec{u}_3$ i tak dalej, aż do wektora $\vec{u}_n$. Oznaczmy przez *B* koniec wektora związanego, który w opisany wyżej sposób powstał z $\vec{u}_n$. ***Wektor*** $\vec{AB}$ ***jest sumą wektorów*** $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, ..., \vec{u}_n$. Twierdzenie wynika z zastosowania drugiej metody dodawania wektorów.

Uwaga *2.u.5.* Jeżeli jeden z wektorów, które występują w mnożeniu skalarnym lub wektorowym, jest wektorem zerowym, to wynik mnożenia wyliczamy według podanych wyżej wzorców. Wiadomo bowiem, że wektor zerowy jest wektorem, którego długość jest równa zeru, a jego kierunek jest dowolny (w odpowiednich

wzorach α jest dowolnym kątem). Wynika stąd, że iloczyn skalarny dowolnego wektora z wektorem zerowym jest liczbą 0, natomiast iloczyn wektorowy dowolnego wektora z wektorem zerowym jest wektorem zerowym.

Własności działań na wektorach

1. Symetria (przemienność) dodawania: $\vec{\boldsymbol{u}}+\vec{\boldsymbol{v}}=\vec{\boldsymbol{v}}+\vec{\boldsymbol{u}}$.

   Symetria iloczynu skalarnego: $\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}=\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}}$.

   Antysymetria iloczynu wektorowego: $\vec{\boldsymbol{u}}\times\vec{\boldsymbol{v}}=-\vec{\boldsymbol{v}}\times\vec{\boldsymbol{u}}$.

2. Łączność:

$$\vec{\boldsymbol{u}}+\left(\vec{\boldsymbol{v}}+\vec{\boldsymbol{w}}\right)=\left(\vec{\boldsymbol{u}}+\vec{\boldsymbol{v}}\right)+\vec{\boldsymbol{w}},$$

$$\left(a\cdot\vec{\boldsymbol{u}}\right)\cdot\vec{\boldsymbol{v}}=a\cdot\left(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\right)=\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\left(a\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\right),$$

$$\left(a\cdot b\right)\cdot\vec{\boldsymbol{u}}=a\cdot\left(b\cdot\vec{\boldsymbol{u}}\right),$$

$$a\cdot\left(\vec{\boldsymbol{u}}\times\vec{\boldsymbol{v}}\right)=\left(a\cdot\vec{\boldsymbol{u}}\right)\times\vec{\boldsymbol{v}}=\vec{\boldsymbol{u}}\times\left(a\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\right)$$

   (tym samym znakiem „·” oznaczono iloczyn wektora przez liczbę oraz iloczyn skalarny wektorów, ale nie powinno to doprowadzić do nieporozumień).

O s t r z e ż e n i e. Działania na wektorach wydają się analogiczne do znanych Czytelnikowi działań na liczbach, jednakże nie zawsze tak jest. Jednym z często spotykanych błędów jest „przenoszenie” łączności działania na iloczyn skalarny, w którym „biorą udział” trzy wektory. Nie jest prawdą, że można postawić znak równości między wyrażeniami: $\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\left(\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{w}}\right)$ i $\left(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\right)\cdot\vec{\boldsymbol{w}}$, czy też między $\vec{\boldsymbol{u}}\times\left(\vec{\boldsymbol{v}}\times\vec{\boldsymbol{w}}\right)$ i $\left(\vec{\boldsymbol{u}}\times\vec{\boldsymbol{v}}\right)\times\vec{\boldsymbol{w}}$ (jednak autorzy znają kilka szczególnych przypadków równości tych wyrażeń).

3. Rozdzielność iloczynu względem sumy.

$$a\cdot\left(\vec{\boldsymbol{u}}+\vec{\boldsymbol{v}}\right)=\left(a\cdot\vec{\boldsymbol{u}}\right)+\left(a\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\right),$$

$$(a+b)\cdot\vec{\boldsymbol{u}}=\left(a\cdot\vec{\boldsymbol{u}}\right)+\left(b\cdot\vec{\boldsymbol{u}}\right),$$

$$\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\left(\vec{\boldsymbol{v}}+\vec{\boldsymbol{w}}\right)=\left(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\right)+\left(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{w}}\right),$$

$$\vec{\boldsymbol{u}}\times\left(\vec{\boldsymbol{v}}+\vec{\boldsymbol{w}}\right)=\left(\vec{\boldsymbol{u}}\times\vec{\boldsymbol{v}}\right)+\left(\vec{\boldsymbol{u}}\times\vec{\boldsymbol{w}}\right).$$

Warunek równoległości wektorów. Dwa wektory $\vec{\boldsymbol{u}}$ i $\vec{\boldsymbol{v}}$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba rzeczywista a lub liczba rzeczywista b, taka że zachodzi równość $\vec{\boldsymbol{u}}=a\cdot\vec{\boldsymbol{v}}$ lub $\vec{\boldsymbol{v}}=b\cdot\vec{\boldsymbol{u}}$. Wynika stąd, że wektor zerowy jest równoległy do każdego wektora – warunek równoległości zachodzi dla $a=0$ (lub $b=0$); wynika stąd również, że każdy wektor jest równoległy do siebie ($a=b=1$).

Warunek prostopadłości wektorów. Dwa wektory $\vec{\boldsymbol{u}}$ i $\vec{\boldsymbol{v}}$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy ich iloczyn skalarny jest równy zeru, tzn. $\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}=0$. Wynika stąd, że wektor zerowy jest prostopadły do każdego wektora.

Postać analityczna wektora

Wektor w przestrzeni jednowymiarowej (wektor na prostej)

Niech będzie dana prosta, a na niej wyróżniony punkt. Z prostej tworzymy oś liczbową, a wyróżniony punkt oznaczamy przez *O*, przypisując mu liczbę (cechę) 0. Z możliwych dwóch zwrotów (prawo – lewo) wybieramy jeden w taki sposób, że na prostej wyróżniamy drugi punkt, różny od punktu *O*, i oznaczamy go *E*. Punktowi *E* przypisujemy liczbę (cechę) 1.

Zwrot osi liczbowej określamy jako zwrot wektora $\vec{\boldsymbol{OE}}$, wektor $\vec{\boldsymbol{OE}}$ nazywamy ***wersorem*** osi i oznaczamy: $\vec{\boldsymbol{OE}}=\vec{\boldsymbol{e}}$. Na tak utworzonej osi liczbowej obieramy dowolny punkt *A* i tworzymy wektor $\vec{\boldsymbol{OA}}$. Wektor ten jest równoległy do

wektora $\vec{e}$, zatem istnieje liczba *a*, taka że $\vec{OA} = a \cdot \vec{e}$, przy czym jeśli punkt *A* znajduje się z tej samej strony punktu *O* co punkt *E*, to $a > 0$, a jeśli z przeciwnej, to $a < 0$ (wynika to z określonego wyżej mnożenia wektora przez liczbę). Punktowi *A* przypisujemy liczbę (cechę) *a*. W ten sposób każdemu punktowi osi jest przypisana dokładnie jedna liczba (cecha), a każdej liczbie jest przypisany dokładnie jeden punkt osi. Taki sposób określania osi liczbowej jest tożsamy ze znanym Czytelnikowi (ze szkoły podstawowej i średniej) pojęciem osi liczbowej.

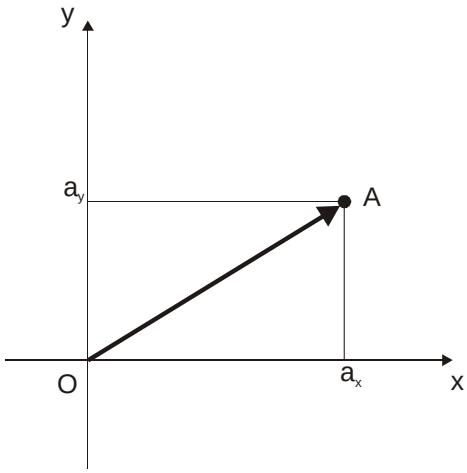
Wektor $\vec{OA}$ zapiszemy $\vec{OA} = [a]$, gdzie *a* – współrzędna wektora.

Wektor w przestrzeni dwuwymiarowej (wektor na płaszczyźnie)

Niech będzie dany układ współrzędnych kartezjańskich na płaszczyźnie, gdzie na osiach *Ox* i *Oy* wprowadzamy *wersory* analogicznie jak w przestrzeni jednowymiarowej; oznaczamy je: na osi *Ox* przez $\vec{e}_x$, na osi *Oy* przez $\vec{e}_y$. Na płaszczyźnie tej obieramy dowolny punkt *A* o współrzędnych $A = (a_x, a_y)$. Na osi *Ox* zaznaczamy punkt A_x o współrzędnej a_x, natomiast na osi *Oy* zaznaczamy punkt A_y o współrzędnej a_y. Rozpatrzymy teraz wektor $\vec{OA}$ oraz wektory $\vec{OA}_x$ i $\vec{OA}_y$. Wektor $\vec{OA}$ jest sumą wektorów $\vec{OA}_x$ i $\vec{OA}_y$ (tzw. ***wektorów składowych***), co zapisujemy: $\vec{OA} = \vec{OA}_x + \vec{OA}_y$. Analogicznie do sposobu zapisu wektora w przestrzeni jednowymiarowej mamy: $\vec{OA}_x = a_x \cdot \vec{e}_x$ oraz $\vec{OA}_y = a_y \cdot \vec{e}_y$, stąd $\vec{OA} = \vec{OA}_x + \vec{OA}_y = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y$. Jeżeli zatem przyjmiemy, że wektory będziemy zawsze przedstawiać jako sumę wektorów składowych w takiej właśnie kolejności, to każdy wektor $\vec{OA}$ będzie jednoznacznie przedstawiony w postaci uporządkowanej pary liczb $[a_x, a_y]$ zwanych ***współrzędnymi wektora***.

Zapisujemy to: $\vec{OA} = [a_x, a_y]$ (rys. 2.3).

Z konstrukcji tej wynika, że współrzędne każdego wektora zaczepionego w początku układu współrzędnych są liczbowo równe współrzędnym punktu będącego jego końcem.

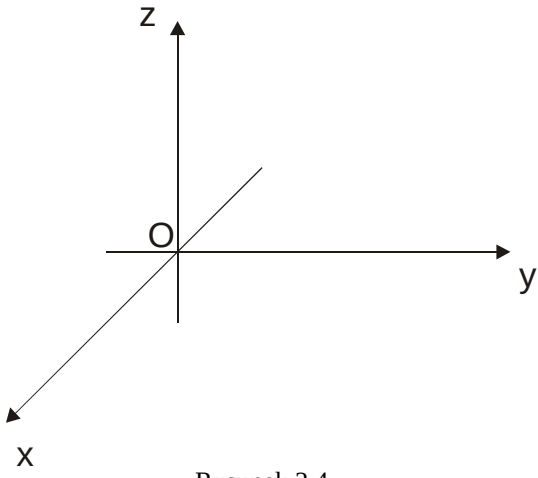


Rysunek 2.3

Współrzędne punktu w przestrzeni trójwymiarowej

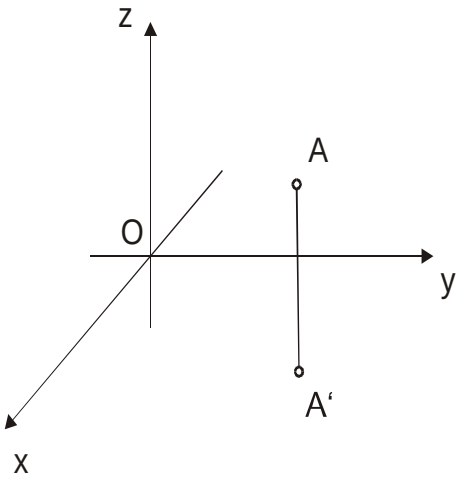
Omówimy kolejno czynności prowadzące do wyznaczenia współrzędnych punktu w przestrzeni trójwymiarowej. Obierzmy prawoskrętny układ współrzędnych *xyz* (zgodny z regułą śruby prawoskrętnej: Jeśli wkręcamy śrubę prawoskrętną w kierunku „od dodatniego zwrotu osi *Ox* do dodatniego zwrotu osi *Oy*" po *mniejszym* kącie, to zwrot ruchu „postępowego" śruby będzie zgodny z dodatnim zwrotem osi *Oz*).

Przykład układu prawoskrętnego przedstawiono na rysunku 2.4.



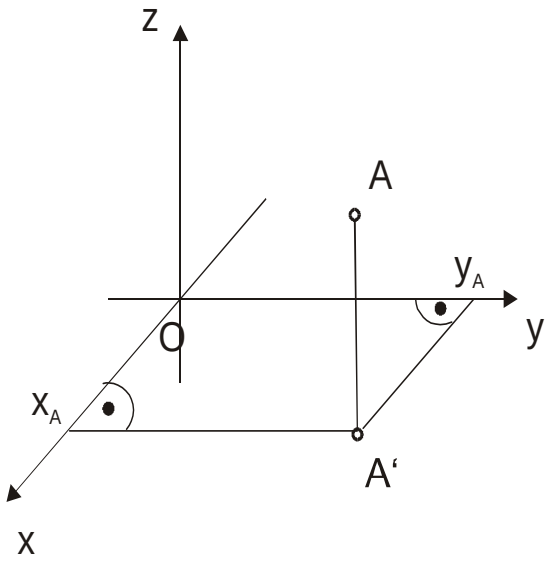
Rysunek 2.4

Niech będzie dany punkt *A*. Przez punkt *A* prowadzimy prostą prostopadłą do płaszczyzny *xOy* (równoległą do osi *Oz*). Przez A' oznaczmy punkt przebicia tą prostą płaszczyzny *xOy* (rys. 2.5).

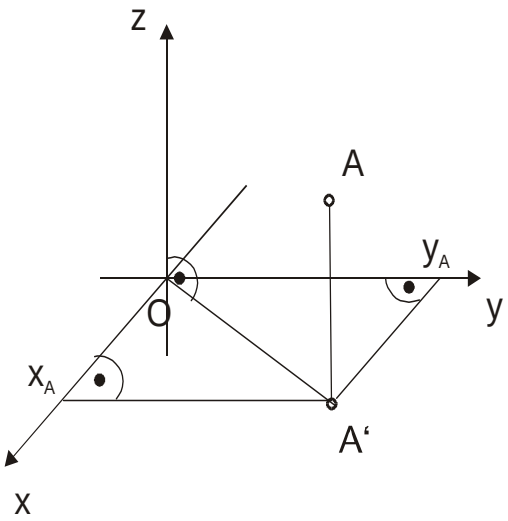


Rysunek 2.5

Przez punkt A' poprowadzimy prostopadłe do osi *Ox* i *Oy*. Na osiach tych otrzymamy odpowiednio współrzędne x_A i y_A, czyli pierwszą i drugą współrzędną punktu *A* (rys. 2.6). Wyznaczamy odcinek OA' (rys. 2.7)

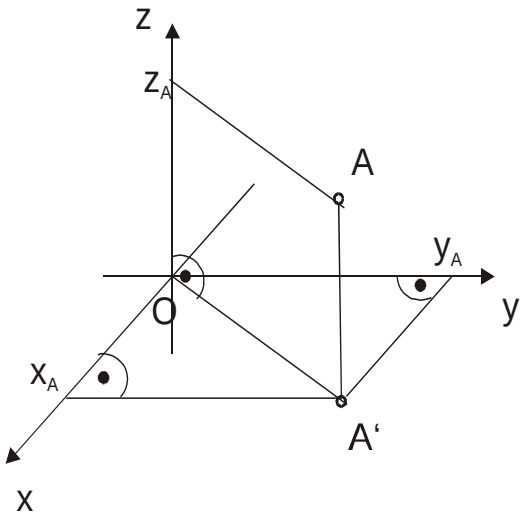


Rysunek 2.6



Rysunek 2.7

Przez punkt *A* prowadzimy prostą prostopadłą do osi *Oz* i przecinającą tę oś (równoległą do OA'). Punkt przecięcia odpowiada liczbie (*Oz* to też oś liczbowa), którą oznaczamy z_A. Jest to trzecia współrzędna punktu *A*, a jej wartość bezwzględna jest równa długości odcinka AA'. Zatem $A = (x_A, y_A, z_A)$ (rys. 2.8).



Rysunek 2.8

Podstawowe własności wektorów i działań na wektorach przedstawiono w tabeli 2.2.

Tabela 2.2.

Nazwa	Przestrzeń jednowymiarowa	Przestrzeń dwuwymiarowa	Przestrzeń trójwymiarowa	Uwagi
1	2	3	4	5
Postaci analityczne wektorów	$\vec{u} = [u]$ $\vec{v} = [v]$	$\vec{u} = [u_x, u_y]$ $\vec{v} = [v_x, v_y]$ $\vec{w} = [w_x, w_y]$	$\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$ $\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]$ $\vec{w} = [w_x, w_y, w_z]$	Liczba współrzędnych wektora jest równa wymiarowi przestrzeni.
Długość wektora	$\lvert\vec{u}\rvert = \lvert u\rvert$	$\lvert\vec{u}\rvert = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$	$\lvert\vec{u}\rvert = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$	–
Dodawanie wektorów	$\vec{u} + \vec{v} = [u + v]$	$\vec{u} + \vec{v} = [u_x + v_x, u_y + v_y]$	$\vec{u} + \vec{v} = [u_x + v_x, u_y + v_y, u_z + v_z]$	Dodawanie odbywa się „po współrzędnych”.
Mnożenie wektora przez liczbę	$a \cdot \vec{u} = [a \cdot u]$	$a \cdot \vec{u} = [a \cdot u_x, a \cdot u_y]$	$a \cdot \vec{u} = [a \cdot u_x, a \cdot u_y, a \cdot u_z]$	Mnożenie przez liczbę odbywa się „po współrzędnych”.
Iloczyn skalarny wektorów	$\vec{u} \cdot \vec{v} = u \cdot v$	$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y$	$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y + u_z \cdot v_z$	Suma iloczynów odpowiednich współrzędnych.

Tabela 2.2.

1	2	3	4	5
Iloczyn wektorowy	nie istnieje	nie istnieje	$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ u_x & u_y & u_z\\ v_x & v_y & v_z\end{vmatrix}$ a po rozwinięciu względem pierwszego wiersza otrzymujemy: $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}u_y & u_z\\ v_y & v_z\end{vmatrix}\cdot\vec{e}_x+$ $+\begin{vmatrix}u_z & u_x\\ v_z & v_x\end{vmatrix}\cdot\vec{e}_y+\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}\cdot\vec{e}_z$	Długość wektora będącego wynikiem iloczynu wektorowego wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ jest równa polu powierzchni równoległoboku rozpiętego przez te wektory. Pole równoległoboku rozpiętego przez dwa wektory na płaszczyźnie xOy wyraża się liczbą $\left\lvert\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}\right\rvert$ (również w przestrzeni dwuwymiarowej).
Iloczyn mieszany	nie rozpatruje się	nie rozpatruje się	$\vec{u}\,\vec{v}\,\vec{w}=(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}=$ $=\begin{vmatrix}u_x & u_y & u_z\\ v_x & v_y & v_z\\ w_x & w_y & w_z\end{vmatrix}$	Wartość bezwzględna iloczynu mieszanego wektorów $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ jest równa objętości równoległościanu rozpiętego przez te wektory. Jeśli iloczyn mieszany jest równy zero, to wektory leżą w jednej płaszczyźnie (są komplanarne).

3. Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej

3.1. Przypomnienie wiadomości o funkcjach

Pojęcie funkcji

W rozdziale 1 przytoczono ścisłą definicję funkcji jako relacji (definicja ta została podana przez G. Peano w roku 1911). Przypomnijmy: dane są niepuste zbiory X i Y; utwórzmy iloczyn kartezjański, wówczas każdą relację $f \subset X \times Y$ mającą tę własność, że dla każdego $x \in X$ istnieje dokładnie jeden $y \in Y$, taki że $(x, y) \in f$, co można inaczej zapisać: $f(x) = y$, nazywamy ***funkcją***. Ta definicja jest zgodna z intuicyjną definicją, którą Czytelnik poznał jeszcze w szkole podstawowej: ma ona tę zaletę, że nie posługuje się nieokreślonym wcześniej słowem „przyporządkowanie". Teraz jednak możemy się już tym słowem posługiwać (element *przyporządkowany* innemu elementowi – to znaczy będący z nim w określonej relacji) i będziemy mówić, że argumentowi x jest przyporządkowana wartość y (dokładnie jedna), jeżeli $f(x) = y$.

Monotoniczność funkcji

Poznane w szkole podstawowej i ugruntowane w szkole średniej pojęcie funkcji wytworzyło zapewne w Czytelniku przeświadczenie, że funkcja opisuje zmiany, a więc proces dynamiczny. Podana już dwukrotnie definicja funkcji jako relacji może wywołać wrażenie, że funkcja to po prostu pewne elementy połączone w pary i... tyle. W zasadzie wrażenie to jest słuszne, jeżeli tylko zbiory argumentów (X) i wartości (Y) są zbiorami i... tyle. Jeżeli jednak każdy z tych zbiorów będzie miał jakąś strukturę, to sytuacja zmieni się radykalnie. W opisywanych przez nas funkcjach zbiory argumentów i wartości mają strukturę porządku liniowego, to znaczy dla każdej pary dwóch różnych elementów zbioru można określić, który z nich jest większy (albo mniejszy). Przy takim dodatkowym warunku można określić monotoniczność funkcji w całej dziedzinie albo w jej części.

Definicja *3.d.1*. Mówimy, że funkcja $y = f(x)$ jest monotonicznie ***rosnąca*** w przedziale (a,b), jeżeli dla każdej pary argumentów $x_1, x_2 \in (a,b)$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Mówimy, że funkcja $y = f(x)$ jest monotonicznie ***malejąca*** w przedziale (a,b), jeżeli dla każdej pary argumentów $x_1, x_2 \in (a,b)$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Mówimy, że funkcja $y = f(x)$ jest monotonicznie ***niemalejąca*** w przedziale (a,b), jeżeli dla każdej pary argumentów $x_1, x_2 \in (a,b)$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

Mówimy, że funkcja $y = f(x)$ jest monotonicznie ***nierosnąca*** w przedziale (a,b), jeżeli dla każdej pary argumentów $x_1, x_2 \in (a,b)$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

Funkcje rosnącą i malejącą nazywamy ***ściśle monotonicznymi***.

Funkcja odwrotna

Przykład *3.p.1*. Niech będzie dana funkcja $y = 2x - 5$. Wzór ten wyraża związek między zmienną niezależną *x* i zmienną zależną *y*. Innymi słowy – zmienna *y* jest „wyliczona" za pomocą zmiennej *x*. Z tej samej zależności można wyliczyć zmienną *x*:

$$y = 2x - 5,$$
$$y + 5 = 2x / : 2,$$
$$\frac{y}{2} + \frac{5}{2} = x,$$
$$x = \frac{1}{2} \cdot y + \frac{5}{2}.$$

Powyższe przekształcenia mogliśmy wykonać bez dodatkowych założeń.

Przykład *3.p.2*. Niech będzie dana funkcja:

$$y = \frac{x+3}{x-2}.$$

Wyrażenie po prawej stronie znaku równości jest ułamkiem, którego mianownik musi być różny od 0, stąd $D = R \setminus \{2\}$ (czyli $x \neq 2$). Łatwo można obliczyć, że:

$x = \dfrac{2y+3}{y-1}$,
a wyrażenie to ma sens dla $y \neq 1$.

Przykład *3.p.3*. Rozważmy zależność funkcyjną $y = x^2 - 2x + 6$; jest to doskonale znana postać funkcji kwadratowej. Jeśli sprowadzimy ją do postaci kanonicznej, otrzymamy $y = (x-1)^2 - 2$, stąd $y + 2 = (x-1)^2$. Jest to równanie, którego prawa strona jest nieujemna (bo jest kwadratem liczby $x-1$), zatem lewa strona musi spełniać warunek nieujemności: $y + 2 \geq 0$, czyli $y \geq -2$. Gdybyśmy chcieli wyliczyć za pomocą pierwiastkowania postać zmiennej *x*, bylibyśmy w pewnym kłopocie, ponieważ np. zależność $(x-1)^2 = 4$ spełniają *dwie* liczby: $x = 3$ oraz $x = -1$, zatem obliczona w ten sposób zależność między zmienną *y* jako argumentem i zmienną *x* jako wartością nie spełnia warunków definicji funkcji (np. argumentowi $y = 2$ „odpowiadają" dwie wartości: $x = 3$ i $x = -1$).

„Kłopotowi" temu można jednak zaradzić, ograniczając dziedzinę funkcji $y = x^2 - 2x + 6$ w taki sposób, aby stała się ona funkcją ***różnowartościową***. W powyższym przykładzie sposób właściwie narzuca się sam, gdy przypomnimy sobie, że wyrażenie pod pierwiastkiem kwadratowym musi być w dziedzinie liczb rzeczywistych nieujemne. Stąd $x - 1 \geq 0$, czyli $x \geq 1$. Funkcję $y = x^2 - 2x + 6$ będziemy rozpatrywać dla $x \in \langle 1, \infty)$.

Dla takich wartości *x* zależność będzie miała postać: $x - 1 = \sqrt{y+2}$, czyli ostatecznie $x = 1 + \sqrt{y+2}$ z założeniem $y \geq -2$.

Po przeanalizowaniu powyższych przykładów Czytelnikowi nietrudno będzie zrozumieć pojęcie funkcji odwrotnej.

Definicja *3.d.2.* Niech będzie dana funkcja $f : X \to Y$ różnowartościowa, taka że $y = f(x)$. Funkcję $g : Y \to X$, taką że $x = g(y) \Leftrightarrow y = f(x)$ nazywamy funkcją odwrotną do funkcji *f* i oznaczamy f^{-1}.

Funkcje $y = f(x)$ i $x = f^{-1}(y)$ mają te same wykresy. Jednak często żądamy, aby zbiorem argumentów była pozioma oś odciętych (*Ox*). Wówczas w formule $x = f^{-1}(y)$ zamieniamy zmienne *x* na *y* i odwrotnie w każdym miejscu, gdzie występują, otrzymując $y = f^{-1}(x)$. Wykresy funkcji $y = f(x)$ i $y = f^{-1}(x)$ są wzajemnie symetryczne względem prostej o równaniu $y = x$.

3.2. Przegląd funkcji rzeczywistych

Funkcją rzeczywistą nazywamy taką funkcję, której dziedziną i przeciwdziedziną (zbiorem wartości) jest zbiór liczb rzeczywistych albo podzbiór zbioru liczb rzeczywistych. Najwygodniejszą postacią zapisu funkcji jest $y = f(x)$, chociaż nie wszystkie funkcje można zapisać w ten sposób.

Zmienną *x* nazywamy ***zmienną niezależną***, a zmienną *y* ***zmienną zależną***.

Niniejszy paragraf jest próbą opisu „najpopularniejszych" funkcji rzeczywistych.

3.2.1. Funkcje wielomianowe

Definicja *3.d.3.* Funkcją wielomianową stopnia *n* jest:

$$y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + ... + a_n \cdot x^n ,$$

gdzie $a_i \in R$ dla $i = 0,1, 2, ..., n$ oraz $a_n \neq 0$.

Czytelnikowi znane są postaci szczególne funkcji wielomianowej.

Dla $n = 0$ zapisaną powyżej funkcję nazywamy ***funkcją stałą***, np. $y = 5$; jej wykresem jest prosta pozioma.

Dla $n = 1$ zapisaną powyżej funkcję nazywamy ***funkcją liniową*** (zapisywaną zwykle w postaci: $y = ax + b$), np. $y = 3x - 2$; jej wykresem jest prosta nachylona do osi *Ox* pod kątem, który zależy od współczynnika *a* (o czym Czytelnik zapewne wie).

Dla $n = 2$ funkcję nazywamy ***funkcją kwadratową*** (zapisywaną zwykle w postaci: $y = ax^2 + bx + c$), np. $y = 2x^2 - 3x + 5$; jej wykresem jest parabola o „ramionach" skierowanych w górę – jeśli $a > 0$, natomiast w dół – jeśli $a < 0$.

3.2.2. Funkcja wykładnicza

Poniżej zamieszczono podstawowe wzory dotyczące potęgowania.

$$a^p a^q = a^{p+q}, \qquad (ab)^p = a^p b^p,$$

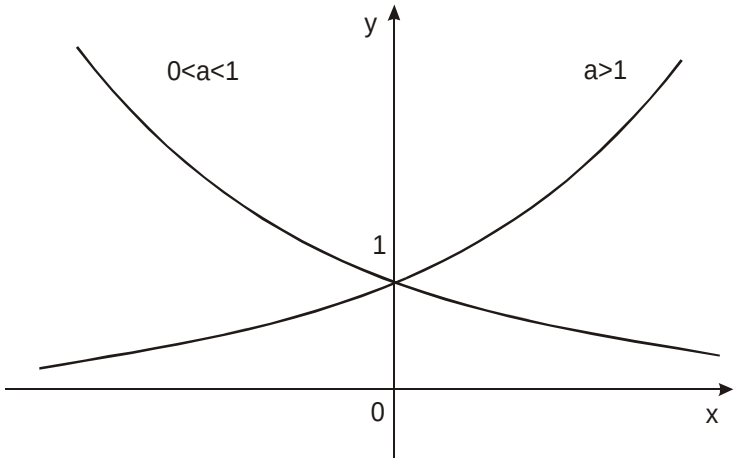
$$a^p : a^q = a^{p-q}, \qquad (a:b)^p = a^p : b^p,$$

$$(a^p)^q = a^{pq} = (a^q)^p, \qquad a^0 = 1 \text{ dla } a \neq 0,$$

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p} = \left(\frac{1}{a}\right)^p, \qquad a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}.$$

Definicja *3.d.4.* Funkcją wykładniczą nazywamy funkcję postaci $y = a^x$, gdzie $a > 0$.

Wykres funkcji wykładniczej przedstawiono na rysunku 3.1.



Rysunek 3.1

3.2.3. Funkcja logarytmiczna

Definicja *3.d.5.* Jeżeli $a^p = b$ oraz $a \in (0,1) \cup (1,\infty), b \in (0,\infty)$, to $\log_a b = p$. Liczbę *p* nazywamy ***logarytmem*** z liczby *b* przy podstawie *a*.

Własności *logarytmu* są następujące:

$$\log_a A + \log_a B = \log_a (A \cdot B),$$

$$\log_a A - \log_a B = \log_a \left(\frac{A}{B} \right),$$

$$p \cdot \log_a A = \log_a (A^p),$$

$$q = \log_a (a^q),$$

$$\log_a A = \frac{\log_b A}{\log_b a},$$

$$p = a^{\log_a p},$$

gdy są spełnione *założenia* wynikające z definicji logarytmu.

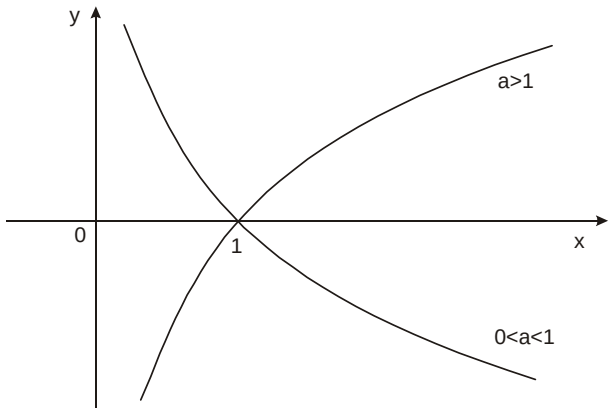
Uwaga *3.u.1.* Przy rozwiązywaniu nierówności logarytmicznych korzystamy z zależności

$$\log_a A > \log_a B \Leftrightarrow \begin{cases} A < B \text{ dla } 0 < a < 1 \\ A > B \text{ dla } a > 1 \end{cases},$$

wynikających z monotoniczności funkcji logarytmicznej (patrz: wykres funkcji logarytmicznej na rysunku 3.2).

Definicja *3.d.6.* Funkcję postaci $y = \log_a x$ dla $a \in (0,1) \cup (1,\infty), x \in (0,\infty)$ nazywamy funkcją logarytmiczną.

Wykres funkcji $y = \log_a x$ przedstawiono na rysunku 3.2.



Rysunek 3.2

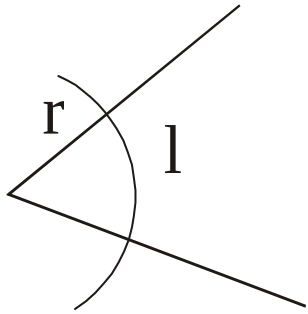
3.2.4. Funkcje trygonometryczne

Miara łukowa kąta

Istnieją różne sposoby mierzenia kątów: marynarze za czasów Kolumba mierzyli kąty w rumbach (1 rumb to 1/32 kąta pełnego), artylerzyści mierzą kąty w tysiącznych (jedna tysiączna jest równa kątowi, pod jakim widać przedmiot o wysokości 1 m z odległości 1 km), w geodezji używa się gradów (jeden grad jest to 1/100 kąta prostego). Najczęściej używaną miarą kąta jest stopień (jeden stopień jest równy 1/360 kąta pełnego).

Wszystkie te miary kątów mają wspólną wadę. Otóż długości odcinków i wielkości kątów mają różne jednostki, co więcej, bywają zapisywane w systemach niedziesiętnych, a przede wszystkim miara kąta nie ma powiązania z miarą długości.

Udanym sposobem rozwiązania tego problemu jest ***miara łukowa kąta***. Opiera się ona na obserwacji, że przy ustalonym promieniu wycinka kołowego jego kąt środkowy α jest wprost proporcjonalny do długości łuku l (patrz: rys. 3.3).



Rysunek 3.3

Miarą kąta α zawartego między promieniami wycinka kołowego o długości l i promieniu r nazywamy liczbę l/r. Jednostkę tak zdefiniowanej miary nazywamy ***radianem***. Czytelnikowi łatwo zatem sprawdzić, stosując znany ze szkoły wzór na długość łuku okręgu, że kąt prosty ma $\pi/2$ radianów, a kąt pełny 2π radianów.

Aby zamienić miarę kąta w *stopniach* na miarę w *radianach*, stosujemy wzór:

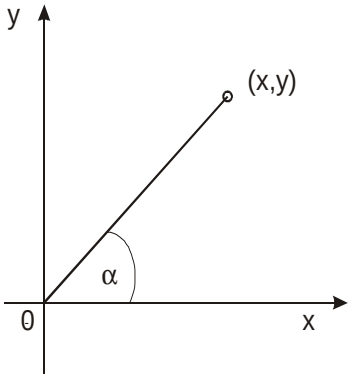
$$\alpha\,[\mathrm{rad}] = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha\,[^\circ]\,.$$

Aby zamienić miarę kąta w *radianach* na miarę w *stopniach*, stosujemy wzór:

$$\alpha\,[^\circ] = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \alpha\,[\mathrm{rad}]\,.$$

Powyższe wzory podano Czytelnikowi, ponieważ (ze względów praktycznych) kąty mierzy się najczęściej w stopniach.

Definicja *3.d.7.* Definicje funkcji trygonometrycznych



$$\cos\alpha = \frac{x}{r}, \text{ gdzie } x^2 + y^2 = r^2,$$

$$\sin\alpha = \frac{y}{r},$$

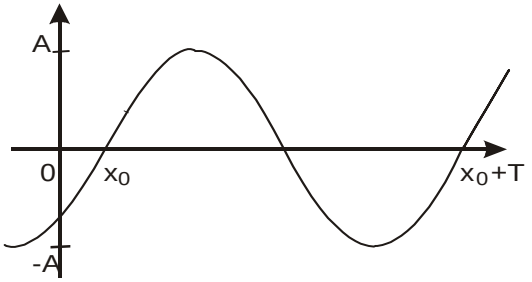
$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}.$$

Rysunek 3.4

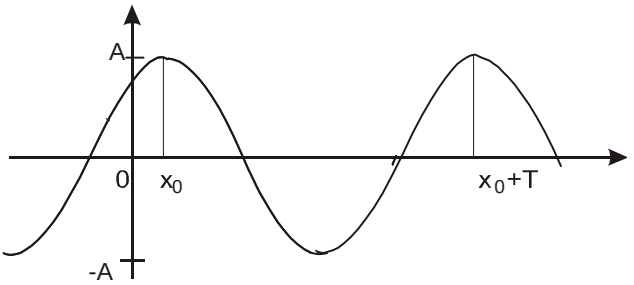
Wykresy funkcji trygonometrycznych

1. $y = A\cdot\sin(\omega x + \varphi)$, $A > 0,\ \omega > 0,$ okres $T = \frac{2\pi}{\omega}$, przesunięcie: $x_0 = -\frac{\varphi}{\omega}$ (rys. 3.5).



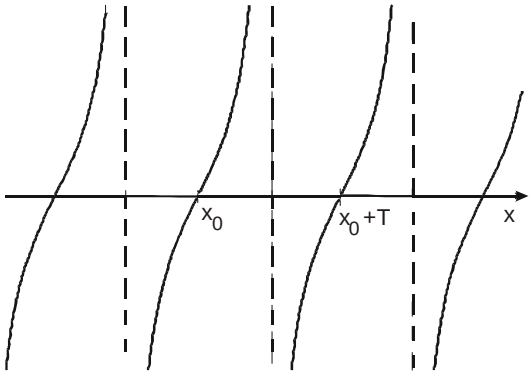
Rysunek 3.5

2. $y = A\cdot\cos(\omega x + \varphi),\ A > 0,\ \omega > 0, \text{okres}: T = \frac{2\pi}{\omega},$ przesunięcie: $x_0 = -\frac{\varphi}{\omega}$ (rys. 3.6).



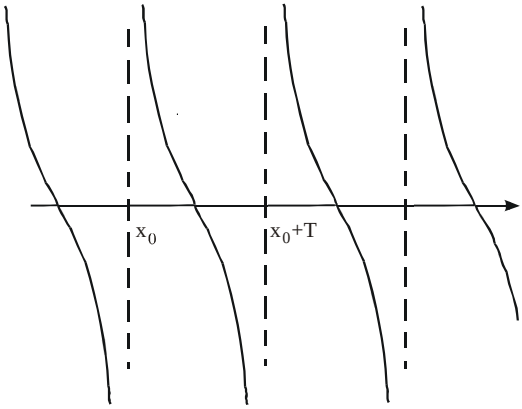
Rysunek 3.6

3. $y = A \cdot \operatorname{tg}(\omega x + \varphi)$, $A > 0$, $\omega > 0$, okres: $T = \dfrac{\pi}{\omega}$, przesunięcie $x_0 = -\dfrac{\varphi}{\omega}$ (rys. 3.7).



Rysunek 3.7

4. $y = A \cdot \operatorname{ctg}(\omega x + \varphi)$, $A > 0$, $\omega > 0$, okres: $T = \dfrac{\pi}{\omega}$, przesunięcie: $x_0 = -\dfrac{\varphi}{\omega}$ (rys. 3.8).



Rysunek 3.8

Podstawowe wzory trygonometryczne

(3.1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$; $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Wzory redukcyjne

Przy stosowaniu wzorów redukcyjnych posługujemy się dwiema zasadami: zasadą funkcji i zasadą znaku.

1. Zasada funkcji

$$\text{funkcja tryg. } (k\cdot\frac{\pi}{2}\pm\alpha)=\begin{cases}\text{z. funkcja tryg.}\,\alpha, \text{ gdy } k \text{ jest parzysta}\\ \text{z. c.funkcja tryg.}\,\alpha, \text{ gdy } k \text{ jest nieparzysta}\end{cases}$$

gdzie: *z* – znak wyniku, *c.* funkcja tryg. – kofunkcja trygonometryczna.

Na przykład:

$$\cos(\frac{31}{4}\pi)=\cos(8\pi-\frac{\pi}{4})=\cos(16\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})=\text{z.}\cos\frac{\pi}{4},$$

$$\operatorname{tg}(\frac{3}{2}\pi-\alpha)=\operatorname{tg}(3\cdot\frac{\pi}{2}-\alpha)=\text{z.}\operatorname{ctg}\alpha.$$

2. Zasada znaku. Znak wyniku jest znakiem wyjściowej funkcji dla wyjściowego kąta (odpowiednia ćwiartka), np. $\sin(\frac{7}{2}\pi+\alpha)=\sin(7\cdot\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\cos\alpha$.

Znaki funkcji trygonometrycznych w poszczególnych ćwiartkach wynikają z definicji tych funkcji i są przedstawione w tabeli 3.1. Najczęściej stosowane wzory redukcyjne zestawiono w tabeli 3.2.

Tabela 3.1

α	I	II	III	IV
$\sin\alpha$	+	+	-	-
$\cos\alpha$	+	-	-	+
$\operatorname{tg}\alpha$	+	-	+	-
$\operatorname{ctg}\alpha$	+	-	+	-

Tabela 3.2

α	$-\varphi$	$\frac{\pi}{2}-\varphi$	$\frac{\pi}{2}+\varphi$	$\pi-\varphi$	$\pi+\varphi$	$\frac{3}{2}\pi-\varphi$	$\frac{3}{2}\pi+\varphi$	$2\pi-\varphi$
$\sin\alpha$	$-\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$\cos\varphi$	$\sin\varphi$	$-\sin\varphi$	$-\cos\varphi$	$-\cos\varphi$	$-\sin\varphi$
$\cos\alpha$	$\cos\varphi$	$\sin\varphi$	$-\sin\varphi$	$-\cos\varphi$	$-\cos\varphi$	$-\sin\varphi$	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$
$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\varphi$	$\operatorname{ctg}\varphi$	$-\operatorname{ctg}\varphi$	$-\operatorname{tg}\varphi$	$\operatorname{tg}\varphi$	$\operatorname{ctg}\varphi$	$-\operatorname{ctg}\varphi$	$-\operatorname{tg}\varphi$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\varphi$	$\operatorname{tg}\varphi$	$-\operatorname{tg}\varphi$	$-\operatorname{ctg}\varphi$	$\operatorname{ctg}\varphi$	$\operatorname{tg}\varphi$	$-\operatorname{tg}\varphi$	$-\operatorname{ctg}\varphi$

Wzory trygonometryczne dotyczące sumy i różnicy kątów

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$

(3.2) $$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Ze wzorów (3.2) wynikają następujące wzory dla kąta podwojonego:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,$$

(3.3) $$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Poniżej podano wzory wyrażające wartości funkcji trygonometrycznych za pomocą wartości funkcji trygonometrycznej $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$:

$$\sin\alpha=\frac{2\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},$$

(3.4)

$$\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Wzory sumy i różnicy funkcji:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

(3.5)

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},$$

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2},$$

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

W tabeli 3.3 zestawiono wartości funkcji trygonometrycznych dla często występujących kątów.

Tabela 3.3

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
ctg α	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

3.2.5. Funkcje kołowe (cyklometrczne)

Funkcjami kołowymi (cyklometrycznymi, arcusowymi) nazywamy funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych. Ich nazwy powstały z nazw funkcji trygonometrycznych przez dodanie słowa *arcus* (czytaj: arkus). Będziemy zatem mówili o funkcjach: „arcus sinus", „arcus kosinus", „arcus tangens" i „arcus kotangens". Wiemy, że funkcje odwrotne mają tylko funkcje ściśle monotoniczne, czyli rosnące albo malejące, a funkcje trygonometryczne takie nie są. Funkcje kołowe są zatem odwrotne (każda z osobna) do ściśle monotonicznej części odpowiedniej funkcji trygonometrycznej. I tak:

1) $x = \sin y \Rightarrow y = \arcsin x,\ D:\ x \in \langle -1,1 \rangle;\ D^{-1}: y \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle,$

gdzie D^{-1} oznacza zbiór wartości funkcji.

2) $x = \cos y \Rightarrow y = \arccos x,\ D:\ x \in \langle -1,1 \rangle;\ D^{-1}: y \in \langle 0, \pi \rangle.$

3) $x = \operatorname{tg} y \Rightarrow y = \operatorname{arc\,tg} x,\ D: x \in R;\ D^{-1}: y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right).$

4) $x = \operatorname{ctg} y \Rightarrow y = \operatorname{arc\,ctg} x,\ D: x \in R;\ D^{-1}: y \in (0, \pi).$

***Uwaga** 3.u.2*. Przy wyliczaniu wartości poszczególnych funkcji cyklometrycznych zgodnie z ich definicją argument ($x \in D$) oznacza wartość odpowiedniej funkcji trygonometrycznej, a wartość funkcji ($y \in D^{-1}$) jest dobranym kątem.

Aby ułatwić wyliczanie wartości funkcji cyklometrycznych (odczytywanie kąta z pierwszej ćwiartki), podajemy Czytelnikowi następujące własności funkcji cyklometrycznych:

$\arcsin(-x) = -\arcsin x,$ $\qquad$ $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x,$

$\arccos(-x) = \pi - \arccos x,$ $\qquad$ $\operatorname{arc\,ctg}(-x) = \pi - \operatorname{arc\,ctg} x.$

Przykłady obliczania wartości funkcji cyklometrycznych

$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6},$ $\qquad$ $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3},$

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4},$$

$$\arcsin(-1)=-\arcsin 1=-\frac{\pi}{2},\qquad \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6},$$

$$\arccos 0=\frac{\pi}{2},$$

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3},\quad \arccos\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3},\qquad \arccos 1=0,$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\pi-\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5}{6}\cdot\pi,\quad \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\pi}{4},$$

$$\arcsin 0=0,$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\pi-\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}\cdot\pi,\quad \operatorname{arc\,tg} 1=\frac{\pi}{4},$$

$$\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3},$$

$$\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{\pi}{6},\qquad \operatorname{arc\,tg}\left(-\sqrt{3}\right)=-\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3}=-\frac{\pi}{3},$$

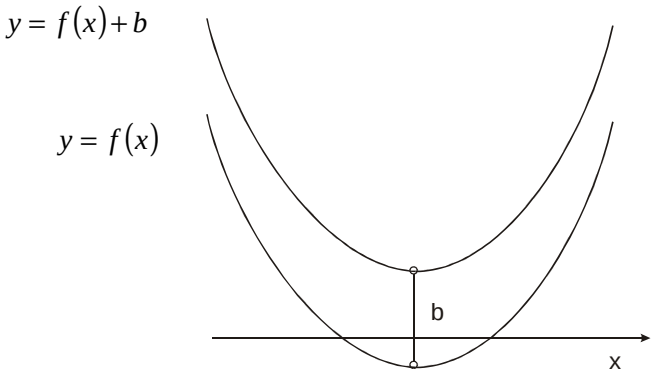
$$\operatorname{arc\,ctg} 0=\frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{arc\,ctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\pi-\operatorname{arc\,ctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{2}{3}\cdot\pi,$$

$$\operatorname{arc\,ctg}\left(-\sqrt{3}\right)=\pi-\operatorname{arc\,ctg}\sqrt{3}=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5}{6}\cdot\pi.$$

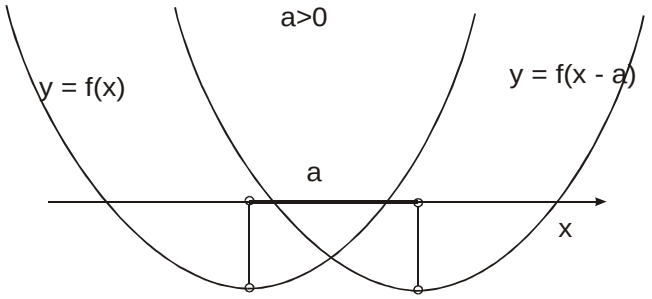
3.2.6. Uwagi o przekształcaniu wykresu funkcji

1. Jeśli znamy wykres funkcji $y=f(x)$, to wykres funkcji $y=f(x)+b$ otrzymamy, przesuwając wykres funkcji $y=f(x)$ o wielkość b w górę, gdy $b>0$, albo o $-b$ w dół, gdy $b<0$ (rys. 3.9).



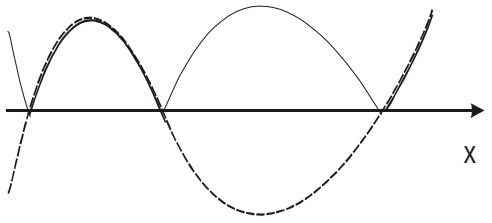
Rysunek 3.9

2. Jeśli znamy wykres funkcji $y = f(x)$, to wykres funkcji $y = f(x-a)$ otrzymamy, przesuwając wykres funkcji $y = f(x)$ o wielkość a w prawo, gdy $a > 0$, albo o $-a$ w lewo, gdy $a < 0$ (rys. 3.10).



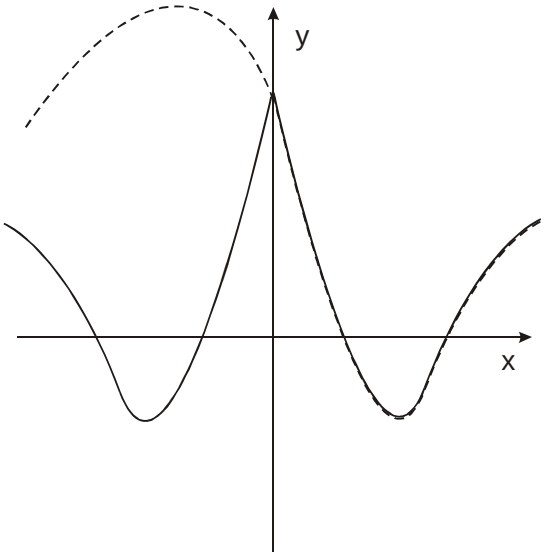
Rysunek 3.10

3. Jeśli znamy wykres funkcji $y = f(x)$, to wykres funkcji $y = |f(x)|$ otrzymamy, „odbijając" względem osi Ox część wykresu znajdującą się pod tą osią i pozostawiając bez zmian część wykresu znajdującą się nad tą osią (rys. 3.11).



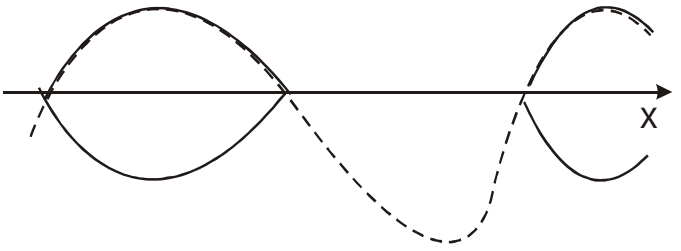
Rysunek 3.11 ($y = f(x)$ – linia przerywana, $y = |f(x)|$ – linia ciągła)

4. Jeśli znamy wykres funkcji $y = f(x)$, to wykres funkcji $y = f(|x|)$ otrzymamy przez odbicie względem osi *Oy* części wykresu znajdującego się z prawej strony osi *Oy* i zastąpienie tym odbiciem części wykresu po lewej stronie osi *Oy* oraz pozostawienie bez zmian części po prawej stronie osi *Oy* (rys. 3.12).



Rysunek 3.12 ($y = f(x)$ – linia przerywana, $y = f(|x|)$ – linia ciągła)

5. Jeśli znamy wykres funkcji $y = f(x)$, to wykres krzywej (na ogół – *nie* funkcji) $|y| = f(x)$ otrzymamy przez wymazanie części wykresu znajdującego się pod osią *Ox*, odbicie względem osi *Ox* części wykresu znajdującego się nad osią *Ox* i pozostawieniu bez zmian części wykresu nad tą osią (rys. 3.13).

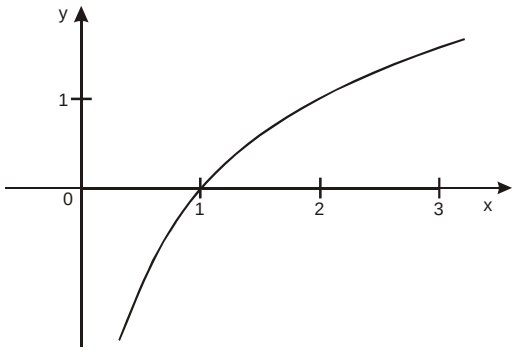


Rysunek 3.13 ($y = f(x)$ – linia przerywana, $|y| = f(x)$ – linia ciągła)

Przykład *3.p.4.* Narysować wykres funkcji $y = \log_2 |x-2|$.

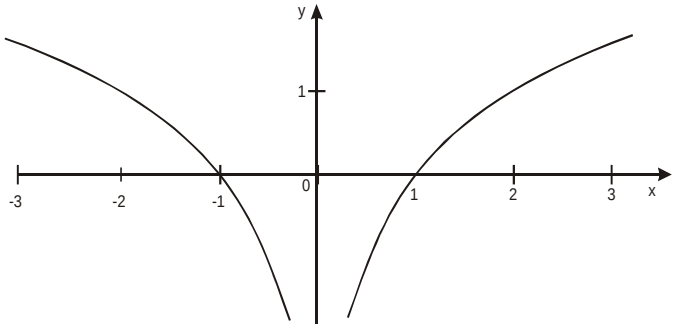
Zadanie wykonujemy w następujących etapach

1. Rysujemy wykres funkcji $y = \log_2 x$ (rys. 3.14).



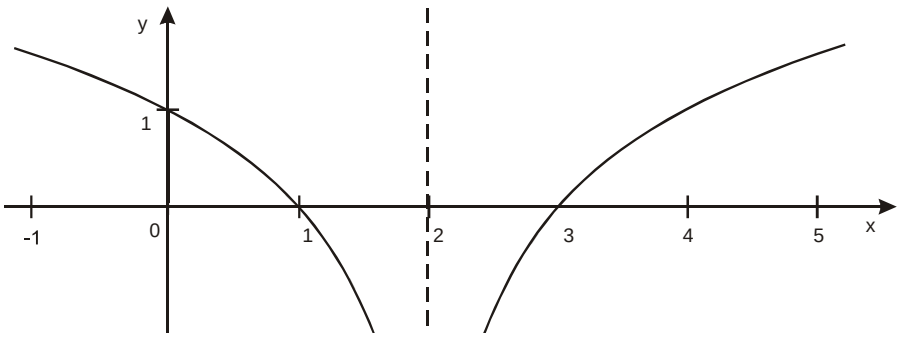
Rysunek 3.14

2. Wykonujemy „odbicie” powyższego wykresu funkcji względem osi *Oy*, otrzymując funkcję $y = \log(|x|)$ (rys. 3.15).



Rysunek 3.15

3. Sporządzamy wykres funkcji $y = \log(|x-2|)$, przesuwając powyższy wykres o 2 w prawo (rys. 3.16).



Rysunek 3.16

***Zadanie** 3.z.1.* Narysować wykres funkcji $y = \left| x^2 - 9 \right|$.

3.3. Granica i ciągłość funkcji

W analizie matematycznej pojęciem podstawowym i najważniejszym jest pojęcie ***granicy***. Do określenia granic używa się „języka" otoczeń. Przez otoczenie punktu x_0 na osi liczbowej rozumiemy taki przedział otwarty, którego punkt x_0 jest środkiem. Jeśli więc końce tego przedziału są oddalone o $\varepsilon > 0$ od punktu x_0, to mówimy o „epsilonowym otoczeniu" punktu x_0.

Stwierdzenie: „Punkt x należy do epsilonowego otoczenia punktu x_0" można zapisać w formie: $|x - x_0| < \varepsilon$.

***Definicja** 3.d.8.1.* Mówimy, że liczba g jest granicą funkcji $y = f(x)$ w punkcie x_0, jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \; \forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon ,$$

i zapisujemy to: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g$.

***Definicja** 3.d.8.2.* Mówimy, że liczba g jest granicą lewostronną funkcji $y = f(x)$ w punkcie x_0, jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x : 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow \left| f(x) - g \right| < \varepsilon ,$$

i zapisujemy to: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = g$.

Definicja *3.d.8.3.* Mówimy, że liczba *g* jest granicą prawostronną funkcji $y = f(x)$ w punkcie x_0, jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x : 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow \left| f(x) - g \right| < \varepsilon ,$$

i zapisujemy to: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = g$.

Definicja *3.d.8.4.* Mówimy, że liczba *g* jest granicą niewłaściwą w nieskończoności funkcji $y = f(x)$ w punkcie x_0, jeśli

$$\forall A > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x : \left| x - x_0 \right| < \delta \Rightarrow \ f(x) > A ,$$

i zapisujemy to: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Podobnie definiuje się granicę niewłaściwą w minus nieskończoności. Czytelnik zapewne sam będzie potrafił zdefiniować granice niewłaściwe prawo- i lewostronne. „Niewłaściwość" powyższa dotyczy wartości funkcji. Poniżej podajemy definicję granicy niewłaściwej ze względu na argument funkcji.

Definicja *3.d.8.5.* Mówimy, że liczba *g* jest granicą funkcji $y = f(x)$ w nieskończoności, jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists B > 0 \ \forall x : x > B \Rightarrow \left| f(x) - g \right| < \varepsilon ,$$

i zapisujemy to: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = g$.

Podobnie definiujemy granicę w minus nieskończoności, a z połączenia powyższych definicji można łatwo określić granicę niewłaściwą funkcji w nieskończoności.

Definicja *3.d.8.6.* Mówimy, że funkcja $y = f(x)$ jest ***ciągła*** w punkcie x_0, jeśli granice lewostronna i prawostronna są skończone i obie równe wartości funkcji w x_0, to znaczy:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) .$$

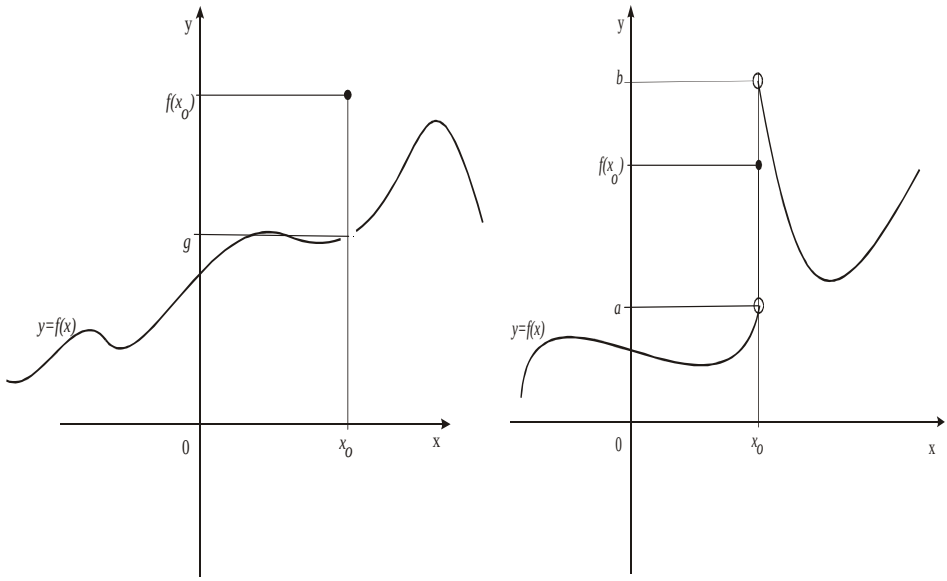
Funkcja $y = f(x)$ jest ciągła w pewnym przedziale, jeśli jest ciągła w każdym punkcie tego przedziału.

Z definicji ciągłości nie wynika, że funkcja ciągła to taka, której wykres można narysować, nie odrywając ołówka od kartki, jednakże dla większości funkcji tak właśnie jest.

Jeżeli funkcja nie jest ciągła, to ma punkty nieciągłości.

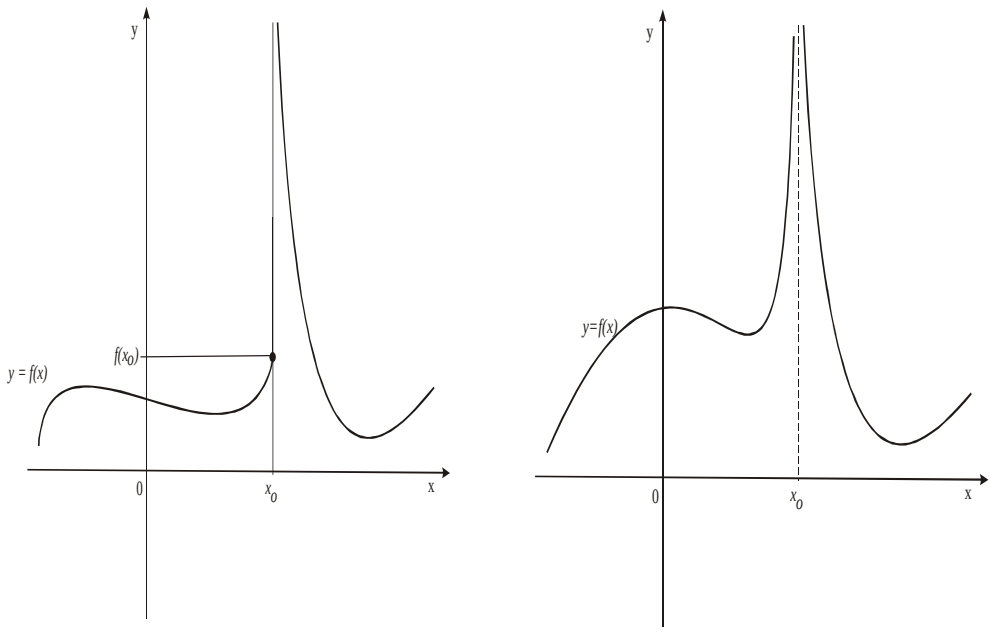
Klasyfikacja punktów nieciągłości

Punkty nieciągłości I rodzaju. Mówimy, że funkcja $y = f(x)$ ma w punkcie x_0 punkt nieciągłości I rodzaju, jeżeli granice: prawostronna i lewostronna funkcji w x_0 są właściwe. Jeżeli dodatkowo granice te są sobie równe, to nieciągłość nazywamy usuwalną, a jeśli są różne – nieusuwalną (rys. 3.17).



Rysunek 3.17

Punkty nieciągłości II rodzaju. Mówimy, że funkcja $y = f(x)$ ma w punkcie x_0 punkt nieciągłości II rodzaju, jeżeli chociaż jedna z granic (prawostronna lub lewostronna) jest niewłaściwa (rys. 3.18).



Rysunek 3.18

Czytelnik zetknął się z granicami funkcji w szkole średniej. Omawiano tam również granice ciągów. Jeśli jednak uświadomimy sobie, że ciąg jest funkcją o argumencie naturalnym, to granica ciągu okaże się szczególnym przypadkiem definicji 3.d.8.4.

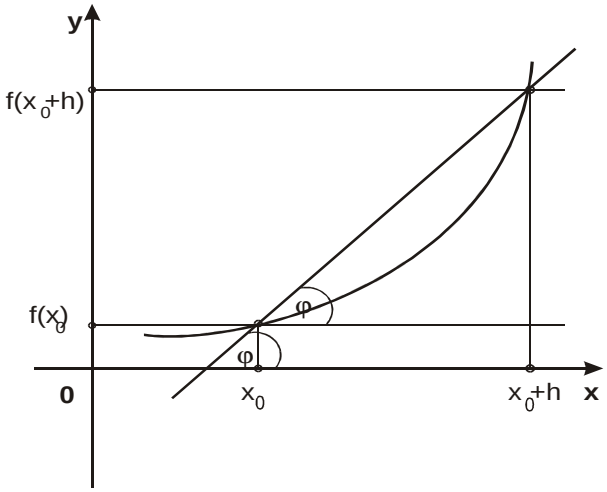
Wreszcie pewna granica, która jest jedną z ważniejszych granic.

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \mathrm{e} \approx 2{,}718...$$

Z liczbą *e* będziemy spotykać się często.

3.4. Pochodna funkcji

Definicja *3.d.9.* Niech będzie dana funkcja $y = f(x)$, ciągła w pewnym przedziale otwartym, do którego należy x_0; niech $x_1 = x_0 + h$ również należy do tego przedziału. Przez punkty o współrzędnych $(x_0, f(x_0))$ oraz $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ prowadzimy prostą, która jest sieczną wykresu powyższej funkcji (rys. 3.19).



Rysunek 3.19

Współczynnik kierunkowy siecznej jest równy tangensowi jej kąta nachylenia do dodatniego zwrotu osi *Ox*. Obliczamy go według wzoru:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

i nazywamy ***ilorazem różnicowym funkcji f w punkcie x_0 dla przyrostu h***.

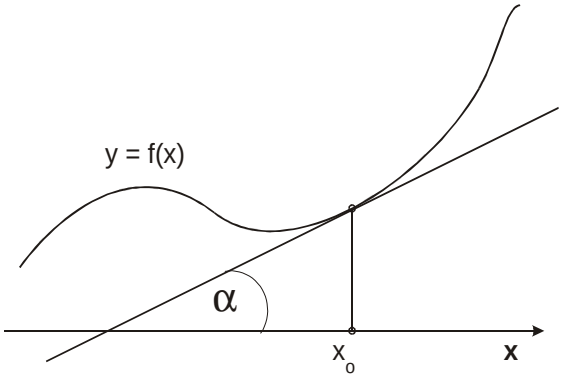
Uwaga *3.u.3.* Nazwa *iloraz różnicowy* jest uzasadniona, ponieważ napisany ułamek jest ilorazem dwóch różnic – w liczniku (oczywiste) i w mianowniku ($h = x_1 - x_0$).

Definicja *3.d.10.* Pochodną funkcji $y = f(x)$ w punkcie x_0, ciągłej w pewnym otoczeniu tego punktu, nazywamy granicę ilorazu różnicowego (jeśli ta granica istnieje) i oznaczamy $f'(x_0)$:

(3.6) $$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Uwaga *3.u.4.* Granica istnieje, gdy

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$



Rysunek 3.20

Interpretacja geometryczna pochodnej funkcji w punkcie

Pochodna funkcji w punkcie jest współczynnikiem kierunkowym stycznej do wykresu funkcji (rys. 3.20).

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha .$$

Z interpretacji geometrycznej pochodnej wynika, że równanie stycznej do wykresu funkcji $y = f(x)$ w punkcie x_0 jest postaci

(3.7) $$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) .$$

Uwaga *3.u.5.* (1) Warunkiem koniecznym istnienia pochodnej w określonym punkcie jest jej ciągłość w tym punkcie. (2) Funkcja ciągła nie musi mieć pochodnej.

Przykłady wyliczenia pochodnej z wykorzystaniem jej definicji

Przykład *3.p.5.* Wyliczyć, korzystając z definicji, pochodną funkcji:

a) $y = \sqrt{x^2 + 8}$ w punkcie $x_0 = 1$, b) $y = \left|x^2 - 4\right|$ w punkcie $x_0 = 2$.

Rozwiązania

a) $y = \sqrt{x^2 + 8}$ w punkcie $x_0 = 1$.

Wyliczymy najpierw

$y_{(1)} = f(1) = \sqrt{1^2 + 8} = 3$ oraz

$$y_{(1+h)} = f(1+h) = \sqrt{(1+h)^2+8} = \sqrt{h^2+2h+9}$$

i podstawimy do wzoru na obliczanie pochodnej w punkcie (3.6); wówczas otrzymamy

$$y'_{(1)} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h^2+2h+9}-3}{h} \cdot \frac{\sqrt{h^2+2h+9}+3}{\sqrt{h^2+2h+9}+3} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2+2h+9-9}{h\cdot\left(\sqrt{h^2+2h+9}+3\right)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h\cdot(h+2)}{h\cdot\left(\sqrt{h^2+2h+9}+3\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{h+2}{\sqrt{h^2+2h+9}+3} = \frac{2}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{3}.$$

Odpowiedź: Pochodna podanej funkcji w punkcie $x_0 = 1$ jest równa $\frac{1}{3}$.

b) $y = \left|x^2-4\right|$ w punkcie $x_0 = 2$.

Z definicji wartości bezwzględnej mamy

$$f(x) = \begin{cases} x^2-4 & \text{dla } x\in(-\infty,-2>\cup<2,\infty), \\ -x^2+4 & \text{dla } x\in(-2,2). \end{cases}$$

Ze wzoru (3.6) $f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \begin{cases} \lim_{h\to 0^-} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} & (1) \\ \lim_{h\to 0^+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} & (2) \end{cases}$

Obliczamy (1) i (2) oddzielnie. Najpierw jednak wyliczymy

$$f(2+h) = -(2+h)^2+4 = -4h-h^2 = -h(4+h) \text{ dla } h<0,$$
$$f(2+h) = (2+h)^2-4 = 4h+h^2 = h(4+h) \text{ dla } h>0,$$
$$f(2) = 2^2-4 = 0;$$

$$(1)\quad \lim_{h\to 0^-} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h(4+h)-0}{h} = \lim_{h\to 0^-} -(4+h) = -4,$$

$$(2)\quad \lim_{h\to 0^+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h(4+h)-0}{h} = \lim_{h\to 0^+} (4+h) = 4.$$

Otrzymaliśmy różne wyniki, co oznacza, że granica nie istnieje, więc pochodna danej funkcji w tym punkcie też nie istnieje.

Odpowiedź: Pochodna podanej funkcji w podanym punkcie nie istnieje.

Zadania

Zadanie *3.z.2.* Korzystając z definicji, obliczyć pochodną funkcji w podanym punkcie:

a) $f(x)=\frac{1}{x+2}$, $x_0=-1$; b) $g(x)=\sqrt{2x^2+7}$, $x_0=1$.

Odpowiedzi:

a) $f'(-1)=-1$, b) $g'(1)=\frac{2}{3}$.

3.5. Pochodna jako funkcja

Definicja *3.d.11.* Niech będzie dana funkcja $y = f(x)$, ciągła w przedziale (a,b). Dla $x \in (a,b)$ określamy:

(3.8) $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Jeśli granica istnieje, to funkcję $f'(x)$ określoną w (3.8) nazywamy pochodną funkcji.

Przykład *3.p.6.* Korzystając z definicji, wyliczyć pochodną funkcji

$f(x)=\sqrt{x+3}$.

Aby wykorzystać definicję pochodnej, musimy wyliczyć

$f(x+h)=\sqrt{(x+h)+3}=\sqrt{x+h+3}$,

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h+3}-\sqrt{x+3}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h+3}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+h+3}+\sqrt{x+3}}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h+3)-(x+3)}{h(\sqrt{x+h+3}+\sqrt{x+3})}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h+3}+\sqrt{x+3})}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h+3}+\sqrt{x+3}}=\frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+3}}=\frac{1}{2\sqrt{x+3}}.$$

Odpowiedź: Pochodna funkcji jest równa: $\frac{1}{2\sqrt{x+3}}$.

Sposoby zapisywania pochodnej: $f'(x)$; y'; $\frac{df}{dx}$; $\frac{dy}{dx}$.

Zadania

***Zadanie** 3.z.3.* Korzystając z definicji, obliczyć pochodną funkcji:

a) $y=\sqrt{x+2}$, b) $y=\dfrac{3}{x+4}$, c) $y=x^2+2x-5$.

Odpowiedzi: a) $\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}$, b) $-\dfrac{3}{(x+4)^2}$, c) $2x+2$.

Podstawowe wzory dotyczące pochodnych

$$[k\cdot u(x)]'=k\cdot u'(x), \qquad \text{gdzie } k \text{ – stała;}$$

$$[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x);$$

$$[u(x)\cdot v(x)]'=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x);$$

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{[v(x)]^2}.$$

W tabeli 3.4 zestawiono pochodne funkcji elementarnych.

Tabela 3.4

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
a	0	arcsin x	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
x	1	arccos x	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
x^α	$\alpha\cdot x^{\alpha-1}$	arctg x	$\frac{1}{x^2+1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	arcctg x	$\frac{-1}{x^2+1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\log_a x$	$\frac{1}{x\cdot\ln a}$
sin$x$	cos$x$	ln x	$\frac{1}{x}$
cos$x$	– sin$x$	a^x	$a^x\cdot\ln a$
tg$x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	e^x	e^x
ctg$x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$e^{f(x)}$	$e^{f(x)}f'(x)$

Przykład *3.p.7.* Obliczyć pochodną z funkcji:

a) $y = 2x^3 - 5x^2 + 7x + 4$; b) $y = (x^2 - 3x)\sin x$;

c) $y = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$; d) $j = (t + \ln t) \cdot \operatorname{arc\,tg}\, t$.

Rozwiązania

Przy obliczaniu pochodnej korzystamy ze wzorów podanych na s. 116.

a) $y = 2x^3 - 5x^2 + 7x + 4$,

$$y' = 2(x^3)' - 5(x^2)' + 7(x)' + (4)' = 6x^2 - 10x + 7 + 0 = 6x^2 - 10x + 7.$$

Odpowiedź: $y' = 6x^2 - 10x + 7$.

b) $y = (x^2 - 3x)\sin x$,

$$y' = (2x - 3)\sin x + (x^2 - 3x)\cos x.$$

Odpowiedź: $y' = (2x - 3)\sin x + (x^2 - 3x)\cos x$.

c) $y = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$,

$$y' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x} + 1) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} + 1)^2} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x} + 1)^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{(\sqrt{x} + 1)^2} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)^2}.$$

Odpowiedź: $y' = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{(\sqrt{x} + 1)^2} \cdot \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)^2}$.

d) $j = (t + \ln t) \cdot \operatorname{arc\,tg}\, t$,

$$j' = \left(1 + \frac{1}{t}\right) \cdot \operatorname{arc\,tg}\, x + \frac{t + \ln t}{1 + t^2}.$$

Odpowiedź: $j' = \left(1 + \dfrac{1}{t}\right) \cdot \operatorname{arc\,tg}\, x + \dfrac{t + \ln t}{1 + t^2}$.

Zadania

***Zadanie** 3.z.4.* Obliczyć pochodną funkcji:

a) $y = 2x^3 - 5x + 4$; b) $y = \frac{2x-4}{x^2+2}$; c) $u = \frac{1+\ln x}{1+x^2}$;

d) $p = (3+2t^2)\cdot e^t$; e) $K = (\sin x - 2\cos x)\cdot \ln x$;

f) $q = \frac{\sin x - 3\cos x}{3\sin x + \cos x}$; g) $T = \frac{t+\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}} + t$;

h) $L = (x+9)\cdot \operatorname{arctg} x$; i) $Q = \frac{\arcsin x}{x^2+1}$; j) $A = \frac{x - \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Odpowiedzi:

a) $y' = 6x^2 - 5$; b) $y' = \frac{-2x^2+8x+4}{(x^2+2)^2}$;

c) $u' = \frac{1-x^2(1+2\ln x)}{x(1+x^2)^2}$; d) $p' = (3+4t+2t^2)\cdot e^t$;

e) $K' = (\cos x + 2\sin x)\cdot \ln x + \frac{\sin x - 2\cos x}{x}$; f) $q' = \frac{10}{(3\sin x + \cos x)^2}$;

g) $T' = \frac{1+2\sqrt{t}}{2\sqrt{t}}$; h) $L' = \operatorname{arctg} x + \frac{x+9}{1+x^2}$;

i) $Q' = \frac{x^2+1-2x\sqrt{1-x^2}\cdot \arcsin x}{(1+x^2)^2\cdot\sqrt{1-x^2}}$; j) $A' = \frac{1-\sqrt{1-x^2} - x\arcsin x}{(1-x^2)\cdot\sqrt{1-x^2}}$.

3.5.1. Pochodna funkcji złożonej

***Definicja** 3.d.12.* Niech będą dane dwie funkcje: $y = f(x)$ i $y = g(x)$. Funkcją złożoną, czyli złożeniem funkcji $f(x)$ z funkcją $g(x)$, nazywamy funkcję $y = f(g(x))$, która powstaje z funkcji $y = f(x)$ w ten sposób, że w wyrażeniu $f(x)$ zamiast zmiennej *x* wstawia się wyrażenie $g(x)$ (w złożeniu funkcji ważna jest kolejność składania). Funkcję $f(x)$ nazywamy zewnętrzną, a funkcję $g(x)$ – wewnętrzną.

Przykład *3.p.8.* Wyznaczyć złożenie funkcji: $f(g(x))$ i $g(f(x))$, gdzie $f(x)=\sin x$, $g(x)=\sqrt{x}$.

Rozwiązanie

Zapis $f(g(x))$ i $g(f(x))$ określa ***kolejność*** składania funkcji.

$f(g(x))=\sin\left(\sqrt{x}\right)=\sin\sqrt{x}$;

$g(f(x))=\sqrt{(\sin x)}=\sqrt{\sin x}$.

Odpowiedź: $f(g(x))=\sin\sqrt{x}$, $g(f(x))=\sqrt{\sin x}$.

Na podstawie powyższego przykładu wprowadzimy inny sposób rozumienia i zapisu złożenia funkcji. Funkcję $y=f(x)$ zapiszemy jako $y=f(t)$, a funkcję $y=g(x)$ jako $t=g(x)$. Złożenie funkcji polega na podstawieniu w miejsce zmiennej niezależnej *t*, występującej w formule $f(t)$, zmiennej zależnej $t=g(x)$. Oznacza to, że gdy chcemy wyliczyć $f(g(x))$, wówczas zapisujemy $y=f(t)=\sin t$ oraz $t=g(x)=\sqrt{x}$ i dalej $y=\sin t=\sin\sqrt{x}$, natomiast gdy chcemy wyliczyć $g(f(x))$, wówczas zapisujemy $y=g(t)=\sqrt{t}$ oraz $t=f(x)=\sin x$ i dalej $y=g(t)=\sqrt{t}=\sqrt{\sin x}$.

Pochodną funkcji złożonej oblicza się według schematu:

$$[f(g(x))]'=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

lub w przypadku zapisu $y=f(t)$, $t=g(x)$:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}.$$

Przykład *3.p.9.* Obliczyć pochodne następujących funkcji złożonych:

a) $y=\sqrt{\sin 3x}$; b) $y=\sin^2 4x$; c) $y=\dfrac{1}{x^2+5x-6}$.

Rozwiązania

a) $y=\sqrt{\sin 3x}$.

Dla lepszego zrozumienia najpierw zapiszemy $y=\sqrt{\sin 3x}=\sqrt{t}$, gdzie $t=\sin 3x=\sin p$, a $p=3x$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dp}\cdot\frac{dp}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{t}}\cdot\cos p\cdot 3=\frac{3\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}},$$

bo $\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2\sqrt{t}}=\frac{1}{2\sqrt{\sin 3x}}$, $\quad\frac{dt}{dp}=\cos p=\cos 3x$, $\quad\frac{dp}{dx}=3$.

Odpowiedź: $y'=\frac{3\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}$.

b) $y=\sin^2 4x$.

Zapisujemy $y=(\sin 4x)^2=t^2$, gdzie $t=\sin 4x=\sin u$, a $u=4x$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{du}\cdot\frac{du}{dx}=2t\cdot\cos u\cdot 4=2\sin 4x\cdot\cos 4x\cdot 4=\sin 8x\cdot 4=4\sin 8x$$

(skorzystano ze znanego wzoru $2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\sin 2\alpha$).

Odpowiedź: $4\sin 8x$.

c) $y=\frac{1}{x^2+5x-6}$.

Zapisujemy $y=\frac{1}{k}$, gdzie $k=x^2+5x-6$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dk}\cdot\frac{dk}{dx}=-\frac{1}{k^2}\cdot(2x+5)=-\frac{2x+5}{(x^2+5x-6)^2}.$$

Odpowiedź: $y'=-\frac{2x+5}{(x^2+5x-6)^2}$.

Zadania

Zadanie *3.z.5*. Wyliczyć pochodne następujących funkcji złożonych:

a) $y=\sqrt{\ln(x^2+1)}$; b) $y=\operatorname{arctg}(x+3)$; c) $b=\ln(x+3\cdot e^{3x})$;

d) $L=\sqrt{1+\arcsin 5x}$; e) $u=p-\sqrt{1+\sin 3p}$; f) $V=\arcsin\sqrt{1-x^2}$;

g) $C=\ln\sqrt{x^2+9}$; h) $z=\sqrt{9+\sin 2x}$.

Odpowiedzi

a) $\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{\ln(x^2+1)}}$; b) $\frac{1}{1+(x+3)^2}$; c) $\frac{1+9\cdot e^{3x}}{x+3\cdot e^{3x}}$;

d) $\frac{5}{2\sqrt{1+\arcsin 5x}\sqrt{1+25x^2}}$; e) $1-\frac{3\cdot\cos 3p}{\sqrt{1+\sin 3p}}$; f) $\pm\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

g) $\frac{x}{x^2+9}$; h) $\frac{\cos 2x}{\sqrt{9+\sin 2x}}$.

3.5.2. Obliczanie pochodnych funkcji postaci $y=f(x)^{g(x)}$

Niech będzie dana funkcja postaci $y=f(x)^{g(x)}$, gdzie $f(x)>0$.

Aby obliczyć jej pochodną, najpierw, korzystając ze wzoru

(3.9) $$a^b=e^{b\ln a},$$

przekształcamy daną funkcję do postaci

$$y=e^{g(x)\ln f(x)},$$

a następnie wyliczamy pochodną według wzorca

(3.10) $$\left[e^{u(x)}\right]'=e^{u(x)}\cdot[u(x)]'.$$

Przykład *3.p.10.* Obliczyć pochodną funkcji typu $y=f(x)^{g(x)}$:

a) $y=x^{\mathrm{tg}x}$; b) $y=(1+\sin x)^{\ln x}$; c) $y=(\mathrm{tg}\,x)^{x^2}$.

Rozwiązania

a) $y=x^{\mathrm{tg}x}$.

Najpierw, korzystając ze wzoru (3.9), daną funkcję zapisujemy w postaci

$y=x^{\mathrm{tg}x}=e^{\mathrm{tg}x\cdot\ln x}$,

następnie w celu wyliczenia pochodnej stosujemy wzór (3.10)

$$y' = e^{\operatorname{tg} x \ln x} \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} \cdot \ln x + \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{x} \right) = x^{\operatorname{tg} x} \cdot \left(\frac{\ln x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg} x}{x} \right).$$

Odpowiedź: Pochodna danej funkcji jest równa $x^{\operatorname{tg} x} \cdot \left(\frac{\ln x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg} x}{x} \right)$.

b) $y = (1+\sin x)^{\ln x}$.

Jak w zadaniu poprzednim, najpierw przekształcamy funkcję według wzoru (3.9), a następnie wyliczamy z tej przekształconej funkcji pochodną według wzoru (3.10) i otrzymujemy

$$y' = e^{\ln x \cdot \ln(1+\sin x)} \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot \ln(1+\sin x) + \ln x \cdot \frac{\cos x}{1+\sin x} \right) =$$

$$= (1+\sin x)^{\ln x} \cdot \left(\frac{\ln(1+\sin x)}{x} + \frac{\ln x \cdot \cos x}{1+\sin x} \right).$$

Odpowiedź: Pochodna danej funkcji jest równa

$$(1+\sin x)^{\ln x} \cdot \left(\frac{\ln(1+\sin x)}{x} + \frac{\ln x \cdot \cos x}{1+\sin x} \right).$$

c) $y = (\operatorname{tg} x)^{x^2}$.

Pochodną liczymy tak jak w poprzednim zadaniu

$$y' = e^{x^2 \cdot \ln \operatorname{tg} x} \cdot \left(2x \cdot \ln \operatorname{tg} x + x^2 \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \right) =$$

$$= (\operatorname{tg} x)^{x^2} \cdot \left(2x \cdot \ln \operatorname{tg} x + x^2 \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \right) =$$

$$= (\operatorname{tg} x)^{x^2} \cdot \left(2x \ln \operatorname{tg} x + \frac{x^2}{\sin x \cos x} \right).$$

Odpowiedź: Pochodna danej funkcji jest równa $(\operatorname{tg} x)^{x^2} \cdot \left(2x \ln \operatorname{tg} x + \frac{x^2}{\sin x \cos x} \right)$.

Zadania

Zadanie *3.z.6.* Obliczyć pochodne następujących funkcji

a) $(x+1)^x$; b) $(\sin x+\cos x)^{\mathrm{tg}x}$; c) $\left(1+x^2\right)^{\ln x}$;

d) $\left(5+\ln x\right)^{\operatorname{arc\,tg} x}$; e) $\left(x+\mathrm{tg}\,x\right)^{\cos x}$.

Odpowiedzi:

a) $(x+1)^x\left[\ln(x+1)+\dfrac{x}{x+1}\right]$;

b) $\left(\sin x+\cos x\right)^{\mathrm{tg}\,x}\left[\dfrac{\ln(\sin x+\cos x)}{\cos^2 x}+\dfrac{\mathrm{tg}\,x\cdot(\cos x-\sin x)}{\sin x+\cos x}\right]$;

c) $(1+x^2)^{\ln x}\left[\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}+\dfrac{2x\ln x}{1+x^2}\right]$;

d) $(5+\ln x)^{\operatorname{arc\,tg} x}\left[\dfrac{\ln(5+\ln x)}{1+x^2}+\dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{x\ln(5+\ln x)}\right]$;

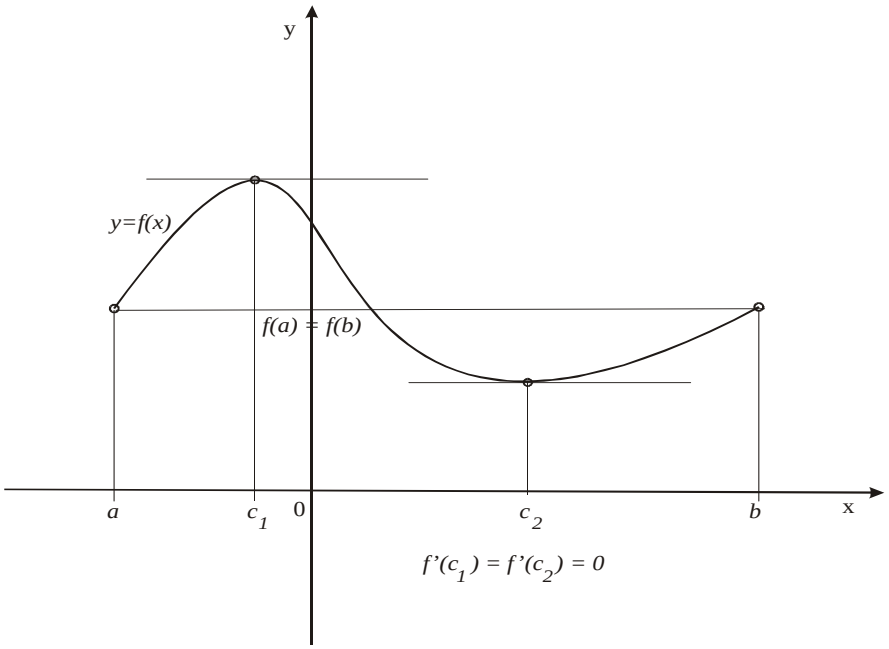
e) $(x+\mathrm{tg}\,x)^{\cos x}\left[-\sin x\cdot\ln(x+\mathrm{tg}\,x)+\dfrac{\cos x}{x+\mathrm{tg}\,x}\cdot\left(1+\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)\right]$.

3.6. Podstawowe twierdzenia dotyczące rachunku różniczkowego funkcji jednej zmiennej

3.6.1. Twierdzenia o wartości średniej

Twierdzenie *3.t.1* **(*Rolle'a*)**. Jeżeli funkcja $y=f(x)$ jest ciągła w przedziale $\langle a,b\rangle$ oraz ma pochodną w przedziale (a,b) i $f(a)=f(b)$, to istnieje takie $c\in(a,b)$, że $f'(c)=0$.

W interpretacji geometrycznej oznacza to, że w przedziale (a,b) istnieje takie c, że styczna do wykresu funkcji $y = f(x)$ w punkcie $(c, f(c))$ jest równoległa do osi Ox (rys. 3.21).

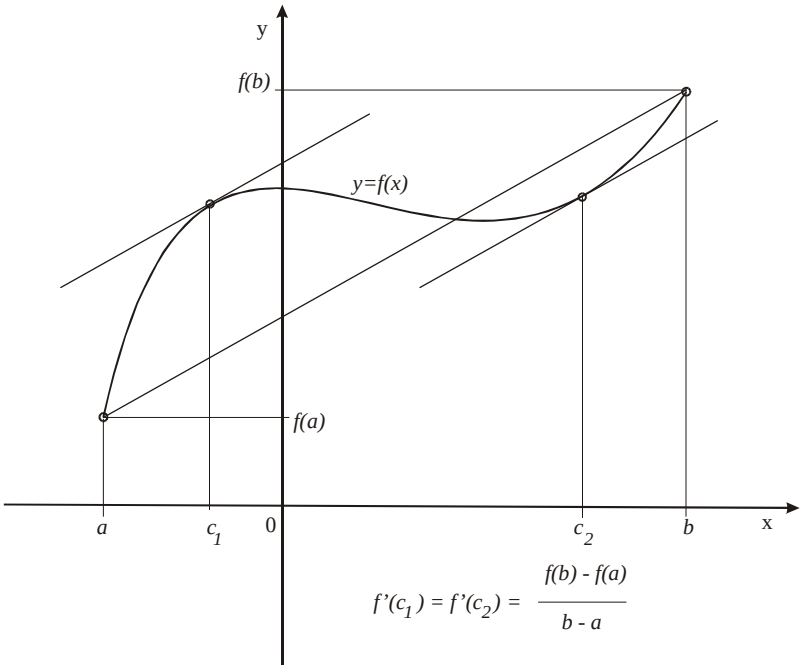


Rysunek 3.21

Twierdzenie *3.t.2* **(*Lagrange'a*)**. Jeżeli funkcja $y = f(x)$ jest ciągła w przedziale $\langle a,b\rangle$ oraz ma pochodną w przedziale (a,b), to istnieje takie $c \in (a,b)$, że

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

W interpretacji geometrycznej oznacza to, że w przedziale (a,b) istnieje takie c, w którym styczna do wykresu funkcji $y = f(x)$ w punkcie c jest równoległa do siecznej, która przecina wykres danej funkcji odpowiednio w punktach: $x = a$ i $x = b$ (rys. 3.22).



Rysunek 3.22

Uwaga *3.u.6.* Twierdzenie Rolle'a jest szczególnym przypadkiem twierdzenia Lagrange'a.

Niech $f^{(k)}(p)$ oznacza pochodną rzędu *k* wyliczoną dla $x = p$, tzn. że z funkcji $y = f(x)$ wyliczamy pochodną, którą nazywamy pochodną pierwszego rzędu i zapisujemy $f'(x)$, z tej pochodnej wyliczamy pochodną, którą nazywamy pochodną drugiego rzędu i zapisujemy $f''(x)$, z tej pochodnej wyliczamy następną pochodną itd.; gdy powtórzymy tę czynność *k* razy, wówczas otrzymaną pochodną nazywamy pochodną rzędu *k* i zapisujemy $f^{(k)}(x)$, jeśli za *x* do wyliczonej pochodnej podstawimy *p*, to otrzymamy $f^{(k)}(p)$.

Twierdzenie *3.t.3* **(*Taylora*)**. Jeżeli funkcja $y = f(x)$ jest ciągła i ma ciągłe pochodne do rzędu $n - 1$ w przedziale $\langle a,b\rangle$ oraz ma pochodną rzędu *n* w przedziale (a,b), to istnieje takie $c \in (a,b)$, że zachodzi równanie:

$$f(b)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}+$$

$$+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n.$$

Wyrażenie

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$$

nazywamy resztą Lagrange'a. Istnieje kilka wersji twierdzenia Taylora, różniących się resztami. Do tego twierdzenia wrócimy w rozdziale o szeregach (w części o szeregach potęgowych). Czytelnik bez trudu zauważy, że twierdzenie Lagrange'a jest szczególnym przypadkiem twierdzenia Taylora dla $n = 1$.

3.6.2. Reguła de l'Hospitala

Twierdzenie *3.t.4.* ***Reguła de l'Hospitala***. Jeżeli zachodzi:

a) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ i $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ albo

b) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x_0)=\pm\infty$ i $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty$

oraz istnieje granica: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ skończona lub niewłaściwa, to istnieje też granica

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$, co więcej: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Uwaga *3.u.7.* Jeżeli funkcja, której granicę mamy obliczyć, jest ilorazem (iloczynem, sumą, różnicą albo potęgą) dwóch funkcji, których granice (właściwe lub niewłaściwe) znamy, to w wymienionych poniżej przypadkach granicę tę (istniejącą lub nie) nazywamy nieoznaczonością lub symbolem nieoznaczonym. Istnieją następujące symbole nieoznaczone:

$$\left[\frac{0}{0}\right],\ \left[\frac{\infty}{\infty}\right],\ [0\cdot\infty],\ [\infty-\infty],\ [0^0],\ [\infty^0],\ [1^\infty].$$

***Uwaga** 3.u.8.* Wypisane wyżej wyrażenia jako wartości graniczne są symbolami nieoznaczonymi, bo w tych przypadkach wyniki końcowe odpowiednich granic dają różne wyniki, zależne od funkcji, z których granice liczymy.

***Przykład** 3.p.11*. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$.

Rozwiązanie

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]^{H}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{\sin x+x\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]^{H}=\lim_{x\to 0}\frac{4\cos 2x}{\cos x+\cos x+x(-\sin x)}=$$

$$=\frac{4\cdot 1}{1+1+0}=2.$$

Odpowiedź: Szukana granica jest równa 2.

***Uwaga** 3.u.9.* W podanym przykładzie stosowano dwa razy regułę de l'Hospital'a, co zaznaczono każdorazowo symbolem $\overset{H}{=}$.

***Uwaga** 3.u.10.* Jeżeli podczas wyliczania granic otrzymamy niżej dane symbole, które *nie są* symbolami nieoznaczonymi, to dają one zawsze podane wyniki

$$[0\cdot 0]=0,\ \left[\frac{0}{\infty}\right]=0\ ,[0^{\infty}]=0.$$

Regułę de l'Hospitala można stosować wyłącznie do symboli nieoznaczonych.

***Przykład** 3.p.12.* Obliczyć następujące granice:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-\sin x}{x^2\sin x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\cdot \operatorname{tg}x}{x\cdot\ln(x+1)}$; c) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x\cdot\ln x$;

d) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-\cos x)\operatorname{ctg}x$; e) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}$; f) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-\cos x)^{\operatorname{tg}x}$.

Rozwiązania

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-\sin x}{x^2\sin x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]^{H}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos x}{2x\sin x+x^2\cos x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]^{H}=$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{2\sin x + 2x\cos x + 2x\cos x - x^2 \sin x} =$$

$$= \left[\frac{0}{0}\right]^H = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{2\cos x + 4\cos x - 4x\sin x - 2x\sin x - x^2\cos x} = \frac{1}{6}.$$

Odpowiedź: Granica jest równa $\frac{1}{6}$.

b) $$\lim_{x\to 0^+} \frac{x\,\mathrm{tg}\,x}{x\ln(x+1)} = \left[\frac{0}{0}\right]^H = \lim_{x\to 0^+} \frac{1\,\mathrm{tg}\,x + x\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\ln(1+x) + x\dfrac{1}{1+x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{\sin x\cos x + x}{\cos^2 x}}{\dfrac{(1+x)\ln(1+x) + x}{1+x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{(1+x)(\sin x\cos x + x)}{\cos^2 x[(1+x)\ln(1+x) + x]} = \left[\frac{0}{0}\right]^H =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1(\sin x\cos x + x) + (1+x)(\cos x\cos x - \sin x\sin x + 1)}{2\cos x(-\sin x)[(1+x)\ln(1+x) + x] + \cos^2 x[1\ln(1+x) + \dfrac{1+x}{1+x} + 1]} = \frac{1}{2}.$$

Odpowiedź: Granica jest równa $\frac{1}{2}$.

c) $$\lim_{x\to 0^+} \sin x \cdot \ln x = [0\cdot(-\infty)] = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\dfrac{1}{\sin x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]^H =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x}{x\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right]^H =$$

$$\overset{H}{=} -\lim_{x\to 0^+} \frac{2\sin x\cos x}{1\cos x - x\sin x} = \frac{0}{1} = 0.$$

Odpowiedź: Granica jest równa 0.

d) $$\lim_{x\to 0^+} (1-\cos x)\,\mathrm{ctg}\,x = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{\mathrm{tg}\,x} = \left[\frac{0}{0}\right]^H = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{\dfrac{1}{\cos^2 x}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Odpowiedź: Granica jest równa 0.

e) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-\sin x)^{\frac{1}{\sin x}} = \left[1^{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{\sin x}\ln(1-\sin x)} = e^{g} =$

---

g wyliczamy oddzielnie:

$$g = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1-\sin x)}{\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right]^{H} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-\cos x}{1-\sin x}}{\cos x} = \frac{-1}{1} = -1.$$

i otrzymany rezultat podstawiamy w miejsce g do wyrażenia przed podkreśleniem

---

$$= e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Odpowiedź: Granica jest równa $\frac{1}{e}$.

f) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-\cos x)^{\operatorname{tg} x} = \left[0^{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\operatorname{tg} x\ln(1-\cos x)} = e^{g} =$

---

wyliczamy g

$$g = \lim_{x\to 0^+}\operatorname{tg} x\ln(1-\cos x) = \left[0\cdot\infty\right] = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1-\cos x)}{\operatorname{ctg} x} =$$

$$= \left[\frac{\infty}{\infty}\right]^{H} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sin x}{1-\cos x}}{\frac{-1}{\sin^2 x}} = -\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^3 x}{1-\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right]^{H} =$$

$$= -\lim_{x\to 0^+}\frac{3\sin^2 x\cos x}{\sin x} \overset{H}{=} -\lim_{x\to 0^+} 3\sin x\cos x = 0$$

i wyliczone g podstawiamy jak w poprzednim zadaniu

$$= e^{0} = 1.$$

Odpowiedź: Granica jest równa 1.

Zadania

Zadanie *3.z.7.* Wyliczyć granicę funkcji:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x\cos x}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(1-\cos x)}{\sin x\operatorname{tg} x}$; d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\operatorname{tg} x}{1-\cos x}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sin x}{x^2-3x}$; g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x\cos x}$; h) $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg}x$;

i) $\lim\limits_{x\to 0}\sin 2x\cdot\ln x$; j) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x)^{\operatorname{ctg}x}$; k) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$; l) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{\sin x}}$;

m) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\operatorname{ctg}x}$; n) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos 2x)^{\operatorname{tg}x}$; o) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg}x)^{\operatorname{tg}x}$; p) $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{tg}x\cdot\ln x$;

r) $\lim\limits_{x\to 0}\sin x\cdot\operatorname{ctg}2x$; s) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

Odpowiedzi

a) 0; b) 1; c) 0; d) 2; e) $\frac{1}{2}$; f) –2/3; g) 1; h) 1; i) 0; j) $\frac{1}{e}$; k) 1; l) e; m) $\frac{1}{e}$; n) 1; o) 1; p) 0; r) $\frac{1}{2}$; s) $\frac{1}{e}$.

3.7. Niektóre zastosowania pochodnej

Z definicji pochodnej wynika, że $f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha$, gdzie zapisany kąt jest kątem między styczną do wykresu funkcji i dodatnim kierunkiem osi *Ox*. Z tej definicji wynika, że $f'(x_0)$ w przybliżeniu równa się przyrostowi funkcji, gdy x_0 zwiększymy o 1.

Na przykład, gdy w danej funkcji $y=f(x)$ x_0 oznacza wpłaconą kwotę, a wyliczone odpowiednie *y* zysk, wówczas $f'(x_0)$ oznacza, o ile w przybliżeniu wzrośnie lub zmaleje zysk, jeżeli wpłacimy o 1 więcej (np. o 1 zł, gdy *x* wyrażamy w złotych).

Jeśli w danej funkcji x_0 oznacza dzień, a odpowiednio wyliczone *y* stan w kasie w dniu x_0, to $f'(x_0)$ oznacza, o ile w przybliżeniu wzrośnie lub zmaleje stan kasy do następnego dnia.

Elastyczność funkcji

Elastyczność funkcji określa wzór

$$x_0\cdot\frac{f'(x_0)}{f(x_0)},$$

który mówi nam, o ile procent w przybliżeniu wzrośnie wartość funkcji, gdy x_0 powiększymy o jeden procent. Wynika to z powyższego opisu zastosowania pochodnej.

Interpretacja elastyczności funkcji. Okazuje się, że gdy x_0 oznacza zainwestowaną kwotę, a odpowiednio wyliczone *y* jako wartość funkcji jest otrzymanym zyskiem, to wyrażenie $x_0 \cdot \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}$ mówi, o ile procent wzrośnie zysk, gdy kwota x_0 wzrośnie o 1%.

Następne podrozdziały będą traktować o badaniu „zachowania się" funkcji.

3.8. Asymptoty wykresu funkcji

Definicja *3.d.13*. Prostą *p* nazywamy ***asymptotą*** funkcji $y = f(x)$, jeśli wykres $y = f(x)$ dąży do prostej *p*, to znaczy jeśli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje taki punkt prostej, że począwszy od niego, odległość każdego punktu prostej *p* od wykresu funkcji $y = f(x)$ jest mniejsza od ε.

Asymptoty dzielimy na: pionowe, poziome i ukośne.

Uwaga *3.u.11*. Jeśli funkcja ma asymptotę poziomą obustronną, to nie ma asymptoty ukośnej.

Definicja *3.d.14*. ***Asymptota pionowa***. Prosta $x = a$ jest asymptotą pionową funkcji $y = f(x)$, jeśli $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ lub $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$.

Definicja *3.d.15*. ***Asymptota pozioma***.
Prosta $x = b$ jest asymptotą poziomą lewostronną, gdy $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$.

Prosta $x = b$ jest asymptotą poziomą prawostronną, gdy $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$.

Prosta $x = b$ jest asymptotą poziomą obustronną, gdy $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$.

Gdy prosta $x = b$ jest asymptotą obustronną, wówczas mówimy, że $x = b$ jest asymptotą poziomą.

Asymptoty pionową i poziomą wylicza się według schematu:
(1) dziedzina funkcji,
(2) granice na końcach dziedziny,
(3) odczytanie asymptot.

Przykład *3.p.13.* Wyznacz asymptoty wykresu funkcji $y = \frac{x+5}{x^2-4}$.

Ad. (1) $x^2 - 4 \neq 0 \;\; x \neq \pm 2 \; x \in (-\infty,-2) \cup (-2,2) \cup (2,\infty)$.

Ad. (2) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x+5}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0$;

granica ta jest wyliczana w analogiczny sposób jak granica ciągu (patrz granica ciągu)

$$\lim_{x\to-2^-} \frac{x+5}{x^2-4} = \frac{3}{0^+} = +\infty, \quad \lim_{x\to-2^+} \frac{x+5}{x^2-4} = \frac{3}{0^-} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to2^-} \frac{x+5}{x^2-4} = \frac{7}{0^-} = -\infty, \quad \lim_{x\to2^+} \frac{x+5}{x^2-4} = \frac{7}{0^+} = +\infty.$$

W przypadku czterech ostatnich granic do licznika i mianownika w miejsce zmiennej *x* podstawiamy liczbę, do której *x* zmierza; otrzymujemy w liczniku odpowiednio: 3 lub 7, a w mianowniku 0; są to granice odpowiednio: licznika i mianownika. Wynikiem ilorazu tych granic będzie ∞, ponieważ mianownik jest liczbą nieskończenie małą. Aby ustalić znak nieskończoności, należy ustalić znak liczby nieskończenie małej w mianowniku, podstawiając za *x* liczbę bliską –2 z lewej strony, gdy granica jest lewostronna, lub z prawej, gdy granica jest prawostronna.

Ad. (3) ***Odpowiedź***: $y = 0$ jest asymptotą poziomą (obustronną), natomiast $x = -2$ i $x = 2$ to asymptoty pionowe.

Definicja *3.d.16.* **Asymptota ukośna**. Prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną funkcji $y = f(x)$, jeśli liczby *a* i *b* wyliczone według wzorów

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} f(x)\cdot\frac{1}{x}; \qquad b = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - ax]$$

są liczbami skończonymi.

Uwaga *3.u.12.* Gdy $a = 0$ i *b* jest liczbą skończoną, asymptota ukośna staje się asymptotą poziomą.

Przykład *3.p.14.* Obliczyć asymptotę ukośną dla funkcji $y = \frac{x^2}{x+5}$.

Rozwiązanie

Wyliczamy najpierw *a*:

$$a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x+5}\cdot\frac{1}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x+5}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1+\frac{5}{x}}=\frac{1}{1+0}=1,$$

a następnie b:

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}[\frac{x^2}{x+5}-1x]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-x^2-5x}{x+5}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-5x}{x+5}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-5}{1+\frac{5}{x}}=-5.$$

Odpowiedź: Powyższa funkcja ma asymptotę ukośną o równaniu $y=x-5$.

Zadania

Zadanie *3.z.8*. Wyliczyć asymptoty funkcji:

a) $y=\frac{x+3}{x^2-4}$; b) $y=\frac{x^2}{x+5}$; c) $y=\frac{ax(x-c)}{x+b}$; d) $y=\frac{e^x}{x}$.

Odpowiedzi:

a) $y=0,\quad x=-2,\quad x=2$; b) $x=-5,\quad y=x-5$; c) $x=-b,\quad y=ax-a(b+c)$;
d) $x=0,\quad y=0$ (asymptota lewostronna).

3.9. Monotoniczność funkcji

Wśród znanych Czytelnikowi funkcji są funkcje rosnące i malejące, czyli monotoniczne, oraz wiele klas funkcji „ani rosnących, ani malejących”. Nie znaczy to, że problem monotoniczności dla tych funkcji nie istnieje. Funkcje, które są „ani rosnące, ani malejące”, mają obszary, w których *są* monotoniczne, a które nazywamy ***przedziałami monotoniczności***. Wyszukiwanie przedziałów monotoniczności nazywamy ***badaniem monotoniczności funkcji***.

Bardzo użytecznym narzędziem badania monotoniczności funkcji jest pochodna. Gdy funkcja $y=f(x)$ ma pochodną (jest różniczkowalna) w podanym przedziale, wówczas:

– Jeżeli dla każdego $x \in (a,b)$ $f'(x) > 0$, to $y = f(x)$ jest w tym przedziale monotonicznie rosnąca.
– Jeżeli dla każdego $x \in (a,b)$ $f'(x) < 0$, to $y = f(x)$ jest w tym przedziale monotonicznie malejąca.

W badaniu monotoniczności zazwyczaj stosowany jest następujący schemat:
(1) określenie dziedziny funkcji,
(2) wyliczenie pochodnej i sporządzenie wykresu takiej jej części, aby z tego wykresu odczytać znak pochodnej,
(3) odpowiedź.

Przykład *3.p.15.* Zbadać monotoniczność funkcji:

a) $y = x + \frac{1}{x}$; b) $y = \frac{x^2}{3-x}$; c) $y = (x+14)\sqrt{16-x^2}$; d) $y = xe^{\frac{1}{3}x}$.

Rozwiązania

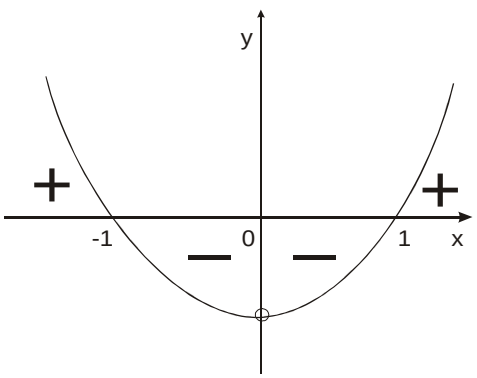
a) $y = x + \frac{1}{x}$.

Ad. (1) Najpierw wyliczamy dziedzinę funkcji $x \neq 0$, czyli $x \in (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$.

Ad. (2) Wyliczamy pochodną

$$y' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}.$$

Pochodna jest ułamkiem, którego mianownik jest dodatni dla każdego x z dziedziny, więc znak licznika pochodnej jest znakiem pochodnej. Sporządzamy więc wykres licznika $w = x^2 - 1$; miejsca zerowe: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Wykres znaku pochodnej przedstawiono na rysunku 3.23.



Rysunek 3.23

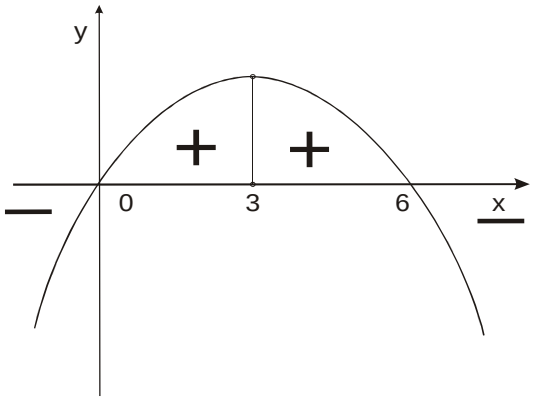
Ad. (3). ***Odpowiedź***: Funkcja rośnie dla $x \in (-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$, natomiast maleje dla $x \in (-1,0),(0,1)$.

b) $y = \dfrac{x^2}{3-x}$.

Ad. (1) Dziedzina: $3 - x \neq 0$, $x \neq 3$.
Ad. (2) Pochodna:

$$y' = \frac{6x - x^2}{(3-x)^2}$$

jest ułamkiem, którego mianownik jest dodatni dla każdego x z dziedziny, więc z wykresu licznika $w = 6x - x^2$, jak w zadaniu poprzednim, odczytamy znak pochodnej, czyli również monotoniczność (rys. 3.24).



Rysunek 3.24

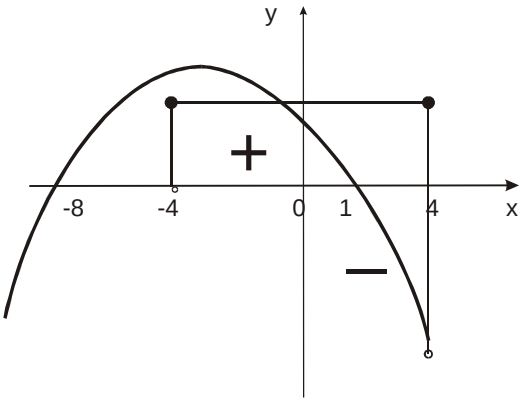
Ad. (3) ***Odpowiedź***: Funkcja rośnie w przedziałach (0,3); (3,6), natomiast maleje w przedziałach (–∞,0); (6,∞).

c) $y = (x+14)\sqrt{16 - x^2}$.

Ad. (1) Dziedzina: $16 - x^2 \geq 0$, więc $x \in <-4, 4>$.
Ad. (2) Pochodna:

$$y' = \sqrt{16 - x^2} + (x+14) \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{16 - x^2}} = \frac{-2x^2 - 14x + 16}{\sqrt{16 - x^2}}$$

jest ułamkiem, którego mianownik jest dodatni prawie dla każdego x z dziedziny (poza – 4 i 4), więc z wykresu licznika pochodnej $w = -2x^2 - 14x + 16$ (rys. 3.25), jak w zadaniach poprzednich, odczytamy znak pochodnej, czyli otrzymamy odpowiedź.



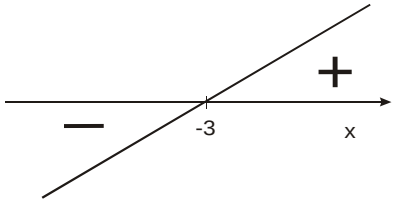
Rysunek 3.25

Ad. (3) ***Odpowiedź***: Funkcja rośnie w przedziale $\langle -4,1)$, natomiast maleje w przedziale $(1,4\rangle$.

d) $y = xe^{\frac{1}{3}x}$.

Ad. (1) Dziedzina: $x \in R$.

Ad. (2) Pochodna $y' = 1 \cdot e^{\frac{1}{3}x} + x \cdot e^{\frac{1}{3}x} \cdot \frac{1}{3} = (1 + \frac{1}{3}x) \cdot e^{\frac{1}{3}x}$ jest iloczynem dwóch czynników, z których drugi jest dodatni dla każdego x z dziedziny, więc z wykresu pierwszego czynnika $w = \frac{1}{3}x + 1$ (rys. 3.26) odczytamy znak pochodnej, czyli monotoniczność.



Rysunek 3.26

Ad. (3) ***Odpowiedź***: Funkcja rośnie w przedziale $(-3, \infty)$, natomiast maleje w przedziale $(-\infty, -3)$.

Zadania

Zadanie *3.z.9.* Wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji:

a) $y=\frac{x^2}{1-x}$; b) $y=x+\frac{1}{x}$; c) $y=\frac{x}{x^2+1}$; d) $y=\frac{x^2}{x^2-1}$;

e) $y=\frac{x^2}{x+3}$; f) $y=x\sqrt{4-x^2}$; g) $y=x\sqrt{4+x^2}$; h) $y=x\sqrt{8-x^2}$;

i) $y=x\sqrt{5-x^2}$; j) $y=(x+3)e^{-2x}$; k) $y=x^2e^{3x}$; l) $y=xe^{x^2}$; m) $y=xe^{-x^2}$.

Odpowiedzi:

a) $\uparrow(0,1);(1,2)$ $\downarrow(-\infty,0);(2,\infty)$; b) $\uparrow(-\infty,-1);(1,\infty)$ $\downarrow(-1,0);(0,1)$;

c) $\uparrow x\in R$; d) $\uparrow(-\infty,-1);(-1,0)$ $\downarrow(0,1);(1,\infty)$;

e) $\uparrow(-\infty,-6);(0,\infty)$ $\downarrow(-6,-3);(-3,0)$; f) $\uparrow(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ $\downarrow<-2,-\sqrt{2});(\sqrt{2},2>$;

g) $\uparrow x\in R$; h) $\uparrow(-2,2)$ $\downarrow<-2\sqrt{2},-2);(2,2\sqrt{2}>$;

i) $\uparrow\left(-\sqrt{\frac{5}{2}},\sqrt{\frac{5}{2}}\right)\downarrow\left\langle-\sqrt{5},-\sqrt{\frac{5}{2}}\right);\left(\sqrt{\frac{5}{2}},\sqrt{5}\right\rangle$; j) $\downarrow\left(-\infty,-\frac{5}{2}\right)\uparrow\left(-\frac{5}{2},\infty\right)$;

k) $\uparrow(-\infty,-3/2);(0,\infty)$ $\downarrow(-3/2,0)$; l) $\uparrow x\in R$;

m) $\uparrow\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\downarrow\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right);\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\infty\right)$.

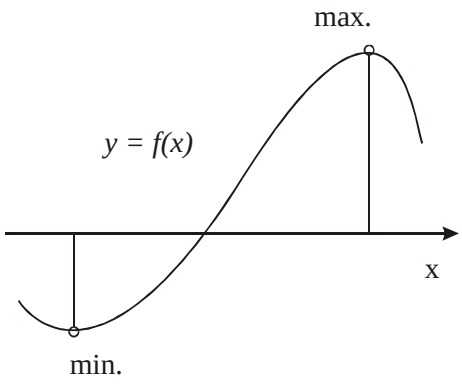
3.10. Ekstremum funkcji

Definicja *3.d.17*. Mówimy, że funkcja $y=f(x)$ ma w punkcie x_0 maksimum lokalne, jeżeli istnieje takie otoczenie punktu x_0, że dla każdego x z tego otoczenia $f(x)<f(x_0)$.

***Definicja** 3.d.18.* Mówimy, że funkcja $y = f(x)$ ma w punkcie x_0 minimum lokalne, jeżeli istnieje takie otoczenie punktu x_0, że dla każdego x z tego otoczenia $f(x) > f(x_0)$.

***Definicja** 3.d.19.* Mówimy, że funkcja $y = f(x)$ ma w punkcie x_0 ekstremum lokalne, jeśli w punkcie tym ma maksimum lub minimum lokalne (patrz rys. 3.27).

.



Rysunek 3.27

Warunek konieczny istnienia ekstremum. Jeżeli funkcja $y = f(x)$ ma pochodną w pewnym przedziale zawierającym x_0, to warunkiem koniecznym istnienia ekstremum w punkcie x_0 jest

$$f'(x_0) = 0.$$

Warunki wystarczające istnienia ekstremum (podamy dwa warunki):

1. Jeżeli funkcja $y = f(x)$ ma pochodną w pewnym otoczeniu punktu x_0 oraz zachodzi warunek konieczny istnienia ekstremum w tym punkcie, to warunkiem wystarczającym istnienia ekstremum w x_0 jest zmiana znaku pochodnej funkcji $y = f(x)$ z lewej i prawej strony punktu x_0; gdy z lewej strony punktu pochodna jest dodatnia, a z prawej ujemna, to w punkcie x_0 istnieje maksimum, a w wypadku przeciwnym – minimum.
2. Jeżeli funkcja ma również pochodną drugiego rzędu (pochodna z pochodnej) oraz w punkcie x_0 zachodzi warunek konieczny istnienia ekstremum, to warunkiem wystarczającym istnienia ekstremum funkcji $y = f(x)$ w punkcie x_0 jest:

$$f''(x_0) \neq 0;$$

jeśli $f''(x_0) < 0$, to funkcja ma maksimum,
$f''(x_0) > 0$, to funkcja ma minimum.

***Uwaga** 3.u.13.* Zmiana znaku pierwszej pochodnej w otoczeniu punktu x_0 jest kryterium rozstrzygającym, choć czasem trudnym „obliczeniowo". Kryterium „drugiej pochodnej" nie zawsze rozstrzyga kwestię istnienia ekstremum. Istnieje ogólniejsze kryterium:

Jeśli funkcja $y = f(x)$ ma pochodną rzędu n (co oznacza istnienie wszystkich pochodnych niższych rzędów) w pewnym otoczeniu punktu x_0 i $f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, ale $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, to – jeśli n jest liczbą parzystą – funkcja $y = f(x)$ ma w punkcie x_0 ekstremum lokalne; jeśli $f^{(n)}(x_0) < 0$, to funkcja ma maksimum lokalne, jeśli $f^{(n)}(x_0) > 0$ – funkcja ma minimum lokalne.

***Uwaga** 3.u.14.* Ekstremum funkcji będziemy wyliczać analogicznie jak monotoniczność funkcji.

***Uwaga** 3.u.15.* Z wykresu części określającej znak pochodnej i jej miejsca zerowe odczytujemy, co następuje:

+ 0 –	funkcja osiąga maksimum lokalne,
– 0 +	funkcja osiąga minimum lokalne,
+ 0 +	brak ekstremum, funkcja rośnie,
– 0 –	brak ekstremum, funkcja maleje.

***Przykład** 3.p.16.* Znaleźć wartości ekstremalne funkcji

a) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$; b) $y = x^2 + \frac{2}{x}$; c) $y = \frac{x^2 - 5}{3 - x}$;

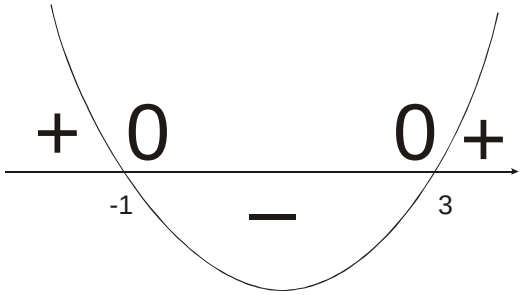
d) $y = (x-1)\sqrt{x^2 - 1}$; e) $y = (x^2 - 3)e^{\frac{1}{2}x^2}$.

Rozwiązania

a) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$.

Ad. (1) Dziedzina: $x \in R$.

Ad. (2) Wyliczamy pochodną: $y' = 3x^2 - 6x - 9$ oraz sporządzamy jej wykres (miejsca zerowe $x_1 = -1 x_2 = 3$), na wykresie nanosimy znaki pochodnej i jej miejsca zerowe (rys. 3.28).



Rysunek 3.28

Ad. (3) Odczytujemy punkty ekstremalne.

Odpowiedź:

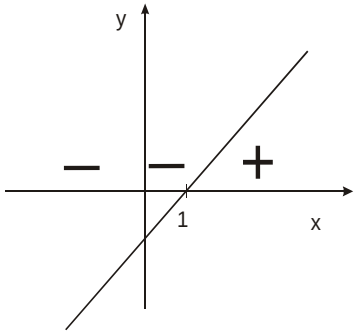
Dla $x_1 = -1$ maksimum $f(-1)_{\max} = 7$.
Dla $x_2 = 3$ minimum $f(3)_{\min} = -25$.

Uwaga *3.u.16.* Wartość ekstremalna funkcji jest jej wartością w punkcie ekstremalnym.

b) $y = x^2 + \frac{2}{x}$.

Ad. (1) Dziedzina: $x \neq 0$, czyli $x \in (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$.

Ad. (2) Pochodna: $y' = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2x^3 - 2}{x^2} = \frac{2(x^3 - 1)}{x^2}$; wyliczona pochodna jest ułamkiem, którego mianownik jest dla każdego x z dziedziny dodatni, więc znak licznika pochodnej jest znakiem pochodnej. Sporządzamy więc wykres licznika pochodnej $w = 2(x^3 - 1) = 2(x-1)(x^2 + x + 1)$ (rys. 3.29) i nanosimy dziedzinę. Miejsca zerowe: $x = 1$.



Rysunek 3.29

Ad. (3) Odczytujemy punkty ekstremalne.

Odpowiedź: Dla $x=1$ funkcja osiąga minimum, którego wartość jest równa 3, czyli $y(1)_{\min}=3$.

c) $y=\dfrac{x^2-5}{3-x}$.

Ad. (1) Dziedzina: $3-x\neq 0, \quad x\neq 3$.

Ad. (2) Pochodna:

$$y'=\frac{-x^2+6x-5}{(3-x)^2}$$

jest ułamkiem, którego mianownik jest dodatni dla każdego x z dziedziny, więc z wykresu funkcji licznika $w=-x^2+6x-5$ odczytamy ekstremum danej funkcji.

Ad. (3) Dla $x=1$ zachodzi minimum równe –2, a dla $x=5$ zachodzi maksimum równe –10.

Odpowiedź: Dla $x=1$ zachodzi minimum, którego wartość jest równa –2, czyli $y(1)_{\min}=-2$, a dla x=5 zachodzi maksimum $y(5)_{\max}=-10$.

d) $y=(x-1)\sqrt{x^2-1}$.

Ad. (1) Dziedzina: $x^2-1\geq 0$, czyli $x\in(-\infty,-1\rangle\cup\langle 1,\infty)$.

Ad. (2) Pochodna: $y'=\dfrac{2x^2-x-1}{\sqrt{x^2-1}}$ jest ułamkiem, którego mianownik jest dodatni dla prawie wszystkich x z dziedziny (z wyjątkiem –1 i 1), więc z wykresu funkcji licznika $w=2x^2-x-1$ i z uwzględnieniem dziedziny otrzymamy rozwiązanie.

Ad. (3) ***Odpowiedź***: Funkcja nie ma ekstremum.

e) $y=(x^2-3)e^{\frac{1}{2}x^2}$.

Ad. (1) Dziedzina: $x\in R$.

Ad. (2) Pochodna $y'=(x^3-x)e^{\frac{1}{2}x^2}$ jest iloczynem dwóch czynników, z których drugi przybiera wartości dodatnie dla każdego x z dziedziny, więc z wykresu funkcji $w=x^3-x=x(x-1)(x+1)$ odczytamy punkty, w których dana funkcja osiąga ekstremum.

Ad. (3) ***Odpowiedź***: Dla $x=-1$ funkcja osiąga minimum równe $-2e^{\frac{1}{2}}=-2\sqrt{e}$, dla $x=0$ funkcja osiąga maksimum równe 0, dla $x=1$ funkcja osiąga minimum równe $-2\sqrt{e}$.

Zadania

Zadanie *3.z.10.* Znaleźć wartości ekstremalne funkcji:

a) $y=\frac{x^2}{x-1}$; b) $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$; c) $y=\frac{x^2}{3-x^2}$; d) $y=x\sqrt{8-x^2}$;

e) $y=x\sqrt{x^2-2}$; f) $y=x^2e^{-x}$; g) $y=xe^{x}$; h) $y=xe^{-\frac{1}{2}x^2}$.

Odpowiedzi:

a) $y(0)_{\max}=0$, $y(2)_{\min}=4$; b) $y(0)_{\max}=-1$; c) $y(0)_{\min}=0$;

d) $y(-2)_{\min}=-4$, $y(2)_{\max}=4$; e) brak ekstremum;

f) $y(0)_{\min}=0$, $y(2)_{\max}=\frac{4}{e^2}$; g) $y(-1)_{\min}=-\frac{1}{e}$;

h) $y(-1)_{\min}=-\frac{1}{\sqrt{e}}$, $y(1)_{\max}=\frac{1}{\sqrt{e}}$.

3.11. Badanie funkcji

Schemat badania funkcji jest następujący:

(1.1) dziedzina i granice na końcach przedziałów dziedziny,
(1.2) asymptoty i punkty przecięcia z osiami układu współrzędnych (parzystość, nieparzystość, okresowość),
(2) pochodna oraz monotoniczność i ekstremum (warunek konieczny),
(3) tabelka,
(4) wykres.

Przykład *3.p.17.* Zbadać przebieg zmienności i naszkicować wykres funkcji

a) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-4}$; b) $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{2-x}$.

Rozwiązania

a) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-4}$.

Ad. (1.1) Dziedzina: $x^2-4\neq 0,\ x\neq\pm 2,\ x\in(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,\infty)$.
Granice na końcach przedziałów dziedziny:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{x^2-4}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{4}{x^2}}=1,\qquad \begin{matrix}0\\ \uparrow\end{matrix}\qquad \begin{matrix}\downarrow\\ 0\end{matrix}$$

$$\lim_{x\to -2^-}\frac{x^2+1}{x^2-4}=\frac{5}{0^+}=+\infty,\qquad \lim_{x\to 2^-}\frac{x^2+1}{x^2-4}=\frac{5}{0^-}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to -2^+}\frac{x^2+1}{x^2-4}=\frac{5}{0^-}=-\infty,\qquad \lim_{x\to 2^+}\frac{x^2+1}{x^2-4}=\frac{5}{0^+}=+\infty.$$

Ad. (1.2) Asymptoty: $y=1$ (pozioma); $x=-2$, $x=2$ (pionowe).
Punkty przecięcia z osiami układu współrzędnych:

$$Ox\qquad y=0\quad\Rightarrow\frac{x^2+1}{x^2-4}=0\Rightarrow x^2+1=0$$

(brak rozwiązań – funkcja nie przecina osi *Ox*);

$$Oy\qquad x=0\quad\Rightarrow y=\frac{0^2+1}{0^2-4}=-\frac{1}{4},$$

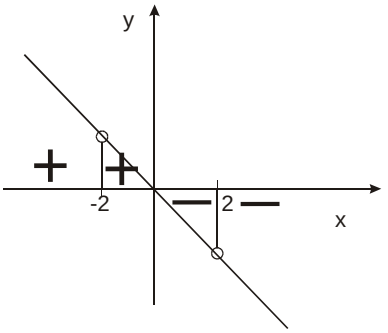
$A=(0,-\dfrac{1}{4})$ jest punktem przecięcia danej funkcji z osią *Oy*.

Ad. (2) Pochodna:

$$f'(x)=\frac{2x(x^2-4)-2x(x^2+1)}{(x^2-4)^2}=\frac{-10x}{(x^2-4)^2}$$

jest ułamkiem, którego mianownik jest dla każdego x z dziedziny dodatni, więc znakiem pochodnej jest znak jej licznika. Sporządzamy więc wykres licznika pochodnej (rys. 3.30) i z tego wykresu, po uwzględnieniu dziedziny, odczytujemy

monotoniczność i warunek konieczny oraz wystarczający istnienia ekstremum. Funkcja rośnie dla $x \in (-\infty,-2) \cup (-2,0)$, a maleje dla $x \in (0,2) \cup (2,\infty)$. Dla $x = 0$ zachodzi warunek konieczny istnienia ekstremum $f(0) = -\frac{1}{4}$.



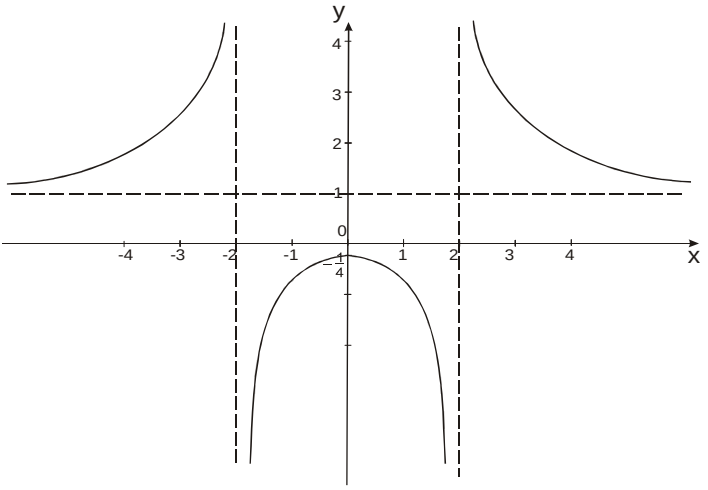
Rysunek 3.30

Ad. (3) Tabelka

x	$-\infty$	$(-\infty,-2)$	-2		$(-2,0)$	0	$(0,2)$	2		$(2,\infty)$	∞
$f'(x)$	+	+	×	×	+	0	-	×	×	-	-
$f(x)$	1	↗	∞	$-\infty$	↗	$-\frac{1}{4}$	↘	$-\infty$	∞	↘	1

Asymptoty: $y = 1$, $x = -2$, $x = 2$ max.

Ad. (4) Wykres



Rysunek 3.31

b) $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{2-x}$.

Ad. (1.1) Dziedzina: $2-x\neq 0,\ x\neq 2,\ x\in(-\infty,2)\cup(2,\infty)$.

Granica na końcach przedziałów dziedziny:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x+1}{2-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+2+\dfrac{1}{x}}{\dfrac{2}{x}-1}=\frac{-\infty+2+0}{0-1}=\infty,$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2+2x+1}{2-x}=\frac{9}{0^+}=\infty,$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2+2x+1}{2-x}=\frac{9}{0^-}=-\infty\quad\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+1}{2-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+2+\dfrac{1}{x}}{\dfrac{2}{x}-1}=\frac{\infty+2+0}{0-1}=-\infty.$$

Ad. (1.2) Asymptota pionowa: $x = 2$. Asymptoty poziomej brak. Wyliczamy asymptotę ukośną $y = ax + b$, gdzie a i b wyliczamy według wzorów

$$a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}\ \text{lub}\ a=\lim_{x\to\pm\infty}f(x)\cdot\frac{1}{x}\quad b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-ax],$$

$$a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2x+1}{2-x}\cdot\frac{1}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2x+1}{2x-x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{2}{x}-1}=\frac{1+0+0}{0-1}=-1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}[\frac{x^2+2x+1}{2-x}+x]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2x+1+2x-x^2}{2-x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x+1}{2-x}=\frac{4+\dfrac{1}{x}}{\dfrac{2}{x}-1}=-4.$$

Asymptota ukośna: $y = -x - 4$.

Punkty przecięcia z osiami:

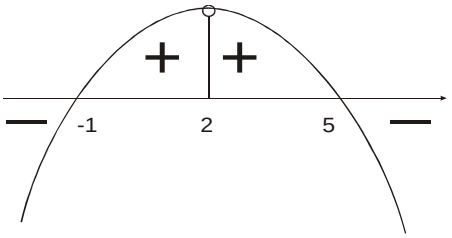
Ox $y = 0$, $\dfrac{x^2+2x+1}{2-x}=0,\ x^2+2x+1=0\ \ x=-1,$ A = (–1,0).

Oy $x = 0$, $y=\dfrac{0^2+2\cdot 0+1}{2-0}=\dfrac{1}{2},\ B=(0,\dfrac{1}{2})$.

Ad. (2) Pochodna:

$$f'(x)=\frac{(2x+2)(2-x)+(x^2+2x+1)}{(2-x)^2}=\frac{-x^2+4x+5}{(2-x)^2}$$

jest ułamkiem, którego licznik dla każdego x z dziedziny jest dodatni, więc z wykresu licznika pochodnej (rys. 3.32) odczytamy monotoniczność oraz warunki konieczny i wystarczający istnienia ekstremum.



Rysunek 3.32

$w=-x^2+4x+5,\ \ x_1=-1, x_2=5$,

$y'>0$ dla $x\in(-1,2)\cup(2,5)$,

$y'<0$ dla $x\in(-\infty,-1)\cup(5,\infty)$,

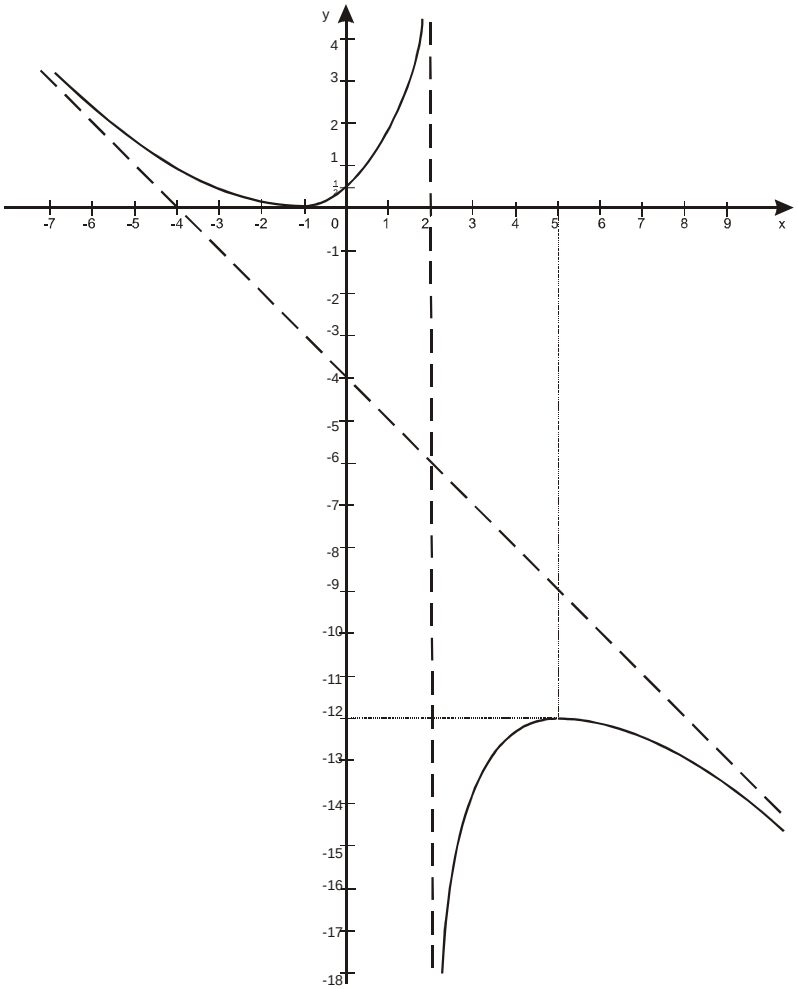
$y'=0$ dla $x=-1,\ x=5,\ f(-1)=0,\ f(5)=-12$.

Ad. (3) Tabelka

X	$-\infty$	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,2)$	2		$(2,5)$	5	$(5,\infty)$	∞
$f'(x)$	–	–	0	+	+	+	×	×	+	0	–	–
$f(x)$	∞	↘	0	↗	0,5	↗	∞	$-\infty$	↗	–12	↘	$-\infty$

Asymptoty: pionowa $x = 2$, ukośna $y = -x - 4$.

Ad. (4) Wykres



Rysunek 3.33

Przykład *3.p.18.* Zbadaj przebieg zmienności i naszkicuj wykres funkcji:

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x-3)^2}.$$

Ustal liczbę rozwiązań równania $f(x) = k$ w zależności od parametru k.

Ad. (1.1) Dziedzina: $(x-3)^2 \neq 0,\ x \neq 3, \qquad x \in (-\infty,3) \cup (3,\infty)$.

Granice na krańcach przedziałów dziedziny

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2}{(x-3)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{(1-\frac{3}{x})^2} = 2, \qquad \lim_{x\to 3^-} \frac{2x^2}{(x-3)^2} = \frac{18}{0^+} = \infty,$$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{2x^2}{(x-3)^2} = \frac{18}{0^+} = \infty.$$

Ad. (1.2) Asymptoty: pionowa $x = 3$, pozioma $y = 2$.
Punkty przecięcia z osiami układu współrzędnych:

$$Ox \quad y = 0 \quad \frac{2x^2}{(x-3)^2} = 0, \quad 2x^2 = 0, \quad x = 0, \qquad A = (0,0),$$

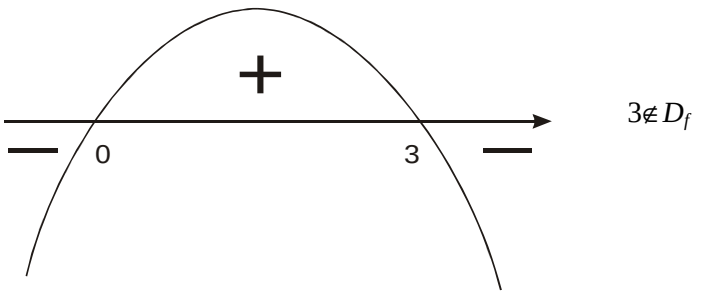
$$Oy \quad x = 0 \quad y = \frac{2\cdot 0^2}{(0-3)^2} = 0, \qquad B = (0,0)\ .$$

Ad. (2) Pochodna:

$$f'(x) = \frac{4x(x-3)^2 - 2(x-3)2x^2}{(x-3)^4} = \frac{-12x^2 + 36x}{(x-3)^4}$$

jest ułamkiem, którego mianownik jest dodatni dla każdego $x \in D_f$, więc z wykresu licznika pochodnej (rys. 3.34) odczytamy monotoniczność oraz warunki konieczny i wystarczający istnienia ekstremum.

$w = -12x(x-3),\ x_1 = 0,\ x_2 = 3.$



Rysunek 3.34

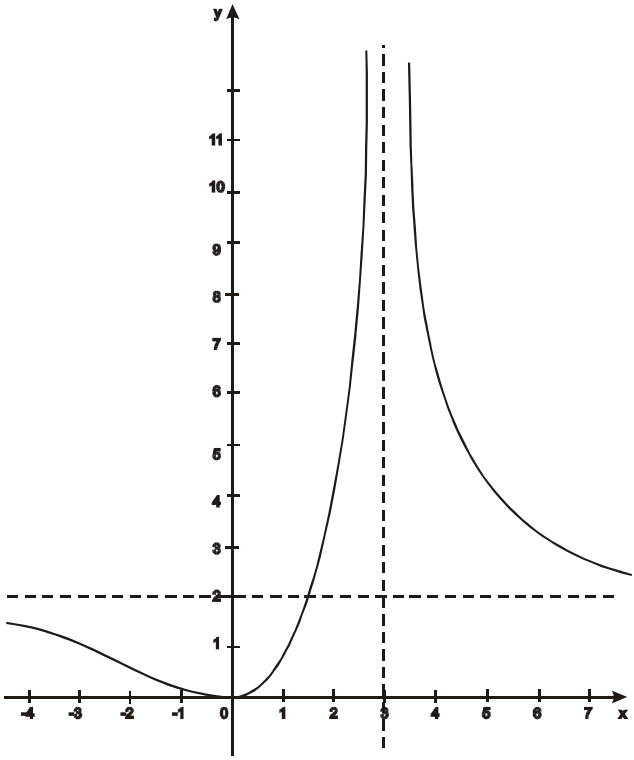
Funkcja rośnie dla $x \in (0,3)$, a maleje dla $x \in (-\infty,0), (3,\infty)$.
Dla $x = 0 \in D$ i dla $x = 3 \notin D$ licznik pochodnej jest równy zeru $f(0) = 0$.

Ad. (3) Tabelka

x	$-\infty$	$(-\infty,0)$	0	$(0,3)$	3		$(3,\infty)$	∞
$f'(x)$	–	–	0	+	×	×	–	–
$f(x)$	2	↘	0	↗	∞	∞	↘	2

Asymptoty: $x = 3$, $y = 2$.

Ad. (4) Wykres



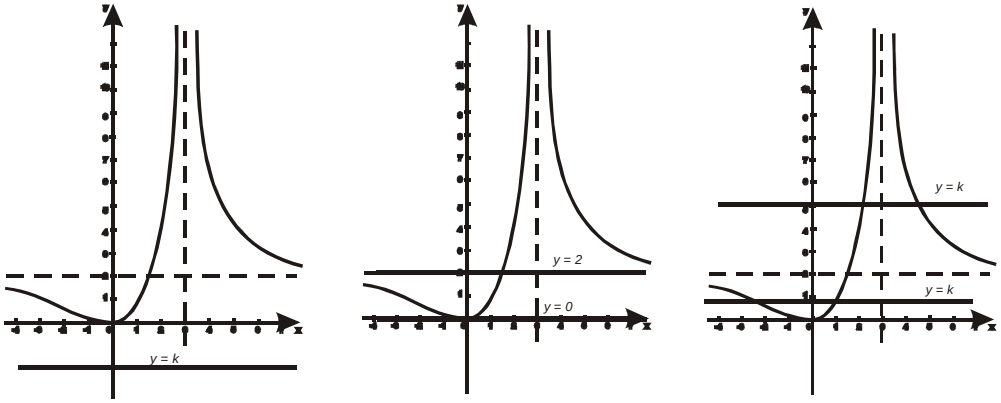
Rysunek 3.35

Aby ustalić liczbę rozwiązań równania $f(x) = k$, zapisujemy je jako układ równań:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = k \end{cases},$$

który rozwiązujemy graficznie. Wykres pierwszego równania znamy, a wykresem drugiego równania jest prosta równoległa do osi Ox i przecinająca oś Oy na

wysokości k. Liczbą rozwiązań jest liczba punktów przecięcia wykresów pierwszego i drugiego równania (rys. 3.36).



Rysunek 3.36

Odpowiedź:

0 rozwiązań dla $k \in (-\infty,0)$,
1 rozwiązanie dla $k = 0$ lub $k = 1$,
2 rozwiązania dla $k \in (0,2) \cup (2,\infty)$.

Zadania

Zadanie *3.z.11*. Zbadać funkcję:

a) $f(x) = x^3 + 12x$; b) $f(x) = (8-x)\cdot\sqrt[3]{x}$; c) $f(x) = \dfrac{2x^2}{9-x^2}$.

3.12. Wartość największa i wartość najmniejsza funkcji ciągłej

1. W przedziale domkniętym. Wartością największą funkcji ciągłej w przedziale domkniętym jest *największa* z *wartości funkcji na lewym i prawym brzegu przedziału, wartości maksymalnych funkcji wewnątrz tego przedziału.*

Wartością najmniejszą funkcji ciągłej w przedziale domkniętym jest *najmniejsza* z *wartości funkcji na lewym i prawym brzegu przedziału, wartości minimalnych funkcji wewnątrz tego przedziału.*

2. W przedziale otwartym. Wartość największą w przedziale otwartym (jeśli taka istnieje) funkcja osiąga tylko wewnątrz przedziału, czyli jest to największa z *wartości maksymalnych wewnątrz tego przedziału. Gdy chociaż jedna z granic danej funkcji na brzegach przedziału (na lewym brzegu przedziału granica prawostronna, na prawym brzegu przedziału granica lewostronna) jest liczbą większą od wyliczonej wcześniej wartości największej, wówczas mówimy, że dana funkcja ciągła nie osiąga wartości największej w tym przedziale*.

Podobnie w przypadku wartości najmniejszej w przedziale otwartym, ponieważ musi być ona osiągnięta wewnątrz przedziału, więc jest to najmniejsza z *wartości minimalnych wewnątrz danego przedziału. Gdy chociaż jedna z granic danej funkcji na brzegach przedziału jest mniejsza od wartości najmniejszej wyliczonej wewnątrz przedziału, wówczas mówimy, że dana funkcja ciągła w danym przedziale wartości najmniejszej nie osiąga.*

Uwaga *3.u.17*. Jeżeli dana funkcja ciągła w przedziale domkniętym lub otwartym ma w danym przedziale tylko maksimum oraz z lewej strony maksimum funkcja ta stale rośnie, a z prawej strony zawsze maleje, to wartość maksymalna tej funkcji jest jednocześnie jej wartością największą.

Uwaga *3.u.18.* Podobnie, gdy dana funkcja ciągła w zadanym przedziale domkniętym lub otwartym ma tylko minimum oraz gdy z lewej strony minimum funkcja ta zawsze maleje, a z prawej tylko rośnie, wówczas wartość minimalna tej funkcji jest jednocześnie jej wartością najmniejszą

Przykład *3.p.19.* Wyliczyć wartości największą i najmniejszą funkcji ciągłej $y = x\sqrt{50 - x^2}$ w przedziale $\langle -1,7 \rangle$.

Ad. (1) Dziedzina: podana w zadaniu.

Ad. (2) Pochodna:

$$y' = 1 \cdot \sqrt{50 - x^2} + x \frac{-2x}{2\sqrt{50 - x^2}} = \frac{50 - x^2 - x^2}{\sqrt{50 - x^2}} = \frac{2(25 - x^2)}{\sqrt{50 - x^2}}$$

jest ułamkiem, którego mianownik jest dodatni dla każdego x z podanej dziedziny, więc z wykresu funkcji licznika pochodnej odczytamy monotoniczność i ekstremum danej funkcji w zadanym przedziale $w = 2(25 - x^2)$.

Ad. (3) Dla $x = 5$ funkcja osiąga maksimum równe $y_{\max} = 5\sqrt{50 - 25} = 25$; z lewej strony maksimum funkcja stale rośnie, a z prawej strony zawsze maleje, więc 25 jest wartością największą danej funkcji w danym przedziale.

Wyliczamy teraz wartość najmniejszą. Funkcja w zadanym przedziale nie ma minimum, więc jej wartość najmniejsza jest najmniejszą z liczb, jakie osiąga funkcja na brzegach podanej dziedziny:

$$y(-1) = -1\sqrt{50-1} = -7, \quad y(7) = 7\sqrt{50-49} = 7,$$

liczbą tą jest więc –7.

Odpowiedź: Zadana funkcja w danym przedziale osiąga wartość największą równą 25 oraz wartość najmniejszą równą –7.

Przykład *3.p.20*. Znaleźć wymiary zbiornika w kształcie prostopadłościanu, którego długość jest cztery razy większa od szerokości, tak aby koszt jego budowy był najmniejszy, jeśli jego dno jest droższe od ścian bocznych o 20% (zakładamy, że zbiornik nie jest przykryty), a objętość jest równa 480 m^3.

Schemat rozwiązania:
(1) Wyliczamy funkcję jednej zmiennej, która określi koszt budowy.
(2) Wyznaczamy przedział zmienności zmiennej występującej w (1).
(3) Wyliczamy wartość najmniejszą wyliczonej funkcji w wyznaczonym przedziale.

Ad. (1) Z tekstu zadania wynika, że koszt budowy

$$K = (4a \cdot a \cdot 1{,}20 + 2 \cdot 4a \cdot h + 2 \cdot a \cdot h) \cdot k = (4{,}8a^2 + 10ah)k,$$

gdzie a – szerokość, h – wysokość, k – koszt budowy 1 m^2 ściany bocznej.

Objętość $V = 4a \cdot a \cdot h = 4a^2 h,$ a z tekstu zadania wynika, że V = 480 m^2, więc $4a^2 h = 480 \;\Rightarrow\; h = \dfrac{480}{4a^2} = \dfrac{120}{a^2}$, czyli po podstawieniu do funkcji określającej koszt budowy otrzymamy:

$$K = (4{,}8a^2 + \frac{1200}{a})k\,.$$

Ad. (2) Wyliczamy teraz przedział zmienności a. Zmienna a jako szerokość musi być dodatnia i spełniać warunek z zadania V = 480, czyli $a \in (0, \infty)$.

Ad. (3) Obliczamy najmniejszą wartość funkcji

$$K = 4{,}8a^2 + \frac{1200}{a}$$

w przedziale $a \in (0, \infty)$.

Wyliczona funkcja w wyznaczonym przedziale jest ciągła, więc stosujemy odpowiedni schemat:
(3.1) Dziedzina: $a \in (0,\infty)$.

(3.2) Pochodna:

$$K' = 9{,}6a - \frac{1200}{a^2} = \frac{9{,}6a^3 - 1200}{a^2},$$

dla a z dziedziny mianownik pochodnej jest dodatni, więc z wykresu licznika pochodnej odczytamy jej miejsca zerowe i znak.

$$w = 9{,}6a^3 - 1200 = 9{,}6(a^3 - 5^3) = 9{,}6(a-5)(a^2 + 5a + 25).$$

Z zapisanej w tej postaci funkcji licznika wynika, że dla

$a \in (0,5)$ $w < 0$, dla $a = 5$ $w = 0$, a dla $a \in (5,\infty)$ $w > 0$.

(3.3) Oznacza to, że funkcja kosztów osiąga minimum dla a = 5, z lewej strony minimum w swej dziedzinie funkcja ta stale maleje, a z prawej stale rośnie, więc dla a = 5 m funkcja kosztów osiąga wartość najmniejszą.

Odpowiedź: Prostopadłościan, którego koszt budowy będzie najmniejszy, ma wymiary:

a = 5 m, $4a$ = 20 m, h = 4,8 m.

4. Całki

4.1. Całka nieoznaczona

4.1.1. Określenie i podstawowe własności całki nieoznaczonej

Definicja** 4.d.1* ***Funkcją pierwotną funkcji ciągłej $y = f(x)$ w przedziale $\langle a,b\rangle$ nazywamy taką funkcję $y = F(x)$, dla której zachodzi równość:

$$F'(x) = f(x), \qquad a \le x \le b.$$

Twierdzenie** 4.t.1.* ***O funkcjach pierwotnych

1. Jeśli $F(x)$ jest jedną z funkcji pierwotnych funkcji ciągłej $f(x)$ w przedziale $\langle a,b\rangle$, to $G(x) = F(x) + C$ jest również funkcją pierwotną funkcji $f(x)$ w przedziale $\langle a,b\rangle$, gdzie C jest dowolną stałą (C = const).
2. Jeśli $F(x)$ i $G(x)$ są funkcjami pierwotnymi funkcji ciągłej $f(x)$ w przedziale $\langle a,b\rangle$, to $F(x) - G(x) = C$, w przedziale $\langle a,b\rangle$, gdzie C jest pewną stałą.

***Uwaga** 4.u.1.* Jeżeli $F(x)$ jest jedną z funkcji pierwotnych funkcji ciągłej $f(x)$ w przedziale $\langle a,b\rangle$, to $F(x) + C$ przebiega zbiór wszystkich funkcji pierwotnych funkcji ciągłej $f(x)$ w przedziale $\langle a,b\rangle$, gdzie C przybiera wszystkie wartości ze zbioru liczb rzeczywistych.

Definicja** 4.d.2.* ***Całka nieoznaczona. Niech będzie dana funkcja $f(x)$, ciągła w przedziale $\langle a,b\rangle$. Całką nieoznaczoną tej funkcji nazywamy zbiór jej wszystkich funkcji pierwotnych i zapisujemy ją:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Całki funkcji elementarnych

$$\int 1dx = x + C, \qquad \int x^{\alpha}dx = \tfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1,$$

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $\int e^x = e^x + C$,

$\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C$, $\int \cos(x) = \sin(x) + C$,

$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg}(x) + C$, $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}(x) + C$,

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$, $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg}(x) + C$,

$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$, $\int \frac{dx}{x} = \ln(x) + C$ $C = \text{const}$.

Własności całek

$$\int a \cdot f(x)\,dx = a \cdot \int f(x)\,dx,$$

$$\int \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Jeśli $\int f(x)dx = F(x) + C$, to $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

4.1.2. Podstawowe metody całkowania

1) całkowanie wprost,
2) całkowanie przez podstawienie,
3) całkowanie przez części,
4) całkowanie przez zastosowanie wzorów rekurencyjnych.

Całkowanie wprost

Polega ono na przekształceniach wyrażenia podcałkowego z zastosowaniem ogólnie znanych praw i własności całek oraz tabeli całek funkcji elementarnych.

***Przykład** 4.p.1.* Obliczyć całki:

a) $\int \frac{x^2 - 3x + 6}{\sqrt{x}} dx$; b) $\int (x + \cos x - e^x - 4\sin x)dx$;

c) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$; d) $\int \left(\sqrt{x} - x\right)^2 dx$.

Rozwiązania

a) $\int \frac{x^2-3x+6}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{x^2-3x+6}{x^{\frac{1}{2}}}dx = \int (x^{2-\frac{1}{2}} - 3x^{1-\frac{1}{2}} + 6x^{1-\frac{1}{2}})dx =$

$$= \int x^{\frac{3}{2}}dx - 3\int x^{\frac{1}{2}}dx + 6\int x^{-\frac{1}{2}}dx =$$

$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - 3\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 6\cdot 2x^{\frac{1}{2}} + C =$$

$$= \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} + 12\sqrt{x} + C.$$

b) $\int (x + \cos x - e^x - 4\sin x)dx = \int x dx + \int \cos x dx - \int e^x dx - 4\int \sin x dx =$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \sin x - e^x + \cos x + C.$$

c) $\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx - \int dx =$

$$= \operatorname{tg} x - x + C.$$

d) $\int \left(\sqrt{x} - x\right)^2 dx = \int (x - 2x\sqrt{x} + x^2)dx = \int x dx - 2\int x^{\frac{1}{2}}x dx + \int x^2 dx =$

$$= \frac{1}{2}x^2 - 2\int x^{\frac{3}{2}}dx + \frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{2}x^2 - 2\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3}x^3 + C =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{5}x^{2+\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}x^3 + C = \frac{1}{2}x^3 - \frac{4}{5}x^2\sqrt{x} + \frac{1}{3}x^3 + C.$$

Całkowanie przez podstawienie

Podstawą tej metody jest zależność:

$$\int g(w(x))\cdot w'(x)dx = \int g(t)dt,$$

gdzie: $t = w(x)$, $dt = w'(x)dx$, a $w(x)$ jest różniczkowalna.

***Przykład** 4.p.2.* Wyliczyć całki:

a) $\int xe^{x^2}\,dx$; b) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$; c) $\int \sin^5 x\,\cos x\;dx$;

d) $\int \frac{1}{\operatorname{tg}(x+4)\cos^2(x+4)}\,dx$; e) $\int \frac{2x-4}{x^2-4x+9}\,dx$.

Rozwiązania

a) $\int xe^{x^2}dx = \left| \begin{array}{ll} x^2=t & xdx=\frac{dt}{2} \\ 2xdx=dt & \end{array} \right| = \int \tfrac{1}{2}e^t dt = \tfrac{1}{2}e^t + C = \tfrac{1}{2}e^{x^2} + C;$

b) $\int \frac{\ln x}{x}dx = \int (\ln x)\cdot \frac{1}{x}dx = \left| \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{1}{x}dx = dt \end{array} \right| = \int t\,dt = \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{1}{2}\ln^2 x + C.$

c) $\int \sin^5 x\,\cos x\;dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x\,dx = dt \end{array} \right| = \int t^5 dt = \frac{1}{6}t^6 + C = \frac{1}{6}\sin^6 t + C;$

d) $\int \frac{1}{\operatorname{tg}(x+4)\cos^2(x+4)}dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg}(x+4) = p \\ \frac{1}{\cos^2(x+4)}dx = dp \end{array} \right| =$

$= \int \frac{1}{p}dp = \ln|p| + C = \ln|\operatorname{tg}(x+4)| + C;$

e) $\int \frac{2x-4}{x^2-4x+9}dx = \ln(x^2-4x+9) + C.$

***Uwaga** 4.u.2.* W przykładzie (d) skorzystano z ostatniej (z wymienionych) własności całki nieoznaczonej, a w przykładzie (e) wykorzystano ostatni wzór całki z funkcji elementarnych.

Całkowanie przez części

Całkowanie przez części stosujemy, gdy funkcja podcałkowa jest iloczynem dwóch funkcji, takich że z jedna z nich jest pochodną pewnej znanej funkcji. Wzór na całkowanie przez części jest prostą konsekwencją definicji funkcji pierwotnej i wzoru na pochodną iloczynu dwóch funkcji:

$$\int f(x)\cdot g'(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)dx\,.$$

Można również przedstawić tę samą zależność w postaci skróconej:

$$\int udv = uv - \int vdu\,.$$

Przykład *4.p.3.* Wyliczyć całki

a) $\int x\cdot\cos x dx$; b) $\int (x^2-3x-2)\cdot\ln x\,dx$;

c) $\int (x^2-x+1)\cdot e^x dx$; d) $\int x\cdot\sin 3x\,dx$; e) $\int \ln x dx$.

Rozwiązania

a) $\int x\cdot\cos x dx = \begin{vmatrix} f(x)=x & g'(x)=\cos x \\ f'(x)=1 & g(x)=\sin x \end{vmatrix} = x\cdot\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C$;

b) $\int (x^2-3x-2)\cdot\ln x\,dx = \begin{vmatrix} f(x)=\ln x & g'(x)=(x^2-3x-2) \\ f'(x)=\dfrac{1}{x}dx & g(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2-2x \end{vmatrix} =$

$= (\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-2x)\ln x - \int(\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-2x)\frac{1}{x}dx = (\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-2x)\ln x -$

$-\frac{1}{3}\int x^2 dx + \frac{3}{2}\int x\,dx + 2\int dx = (\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-2x)\ln x - \frac{1}{9}\,x^3 + \frac{3}{4}x^2 + 2x + C$.

c) $\int (x^2-x+1)\cdot e^x dx = \begin{vmatrix} f(x)=x^2-x+1 & g'(x)=e^x \\ f'(x)=(2x-1) & g(x)=e^x \end{vmatrix} =$

$= (x^2-x+1)e^x - \int(2x-1)e^x dx =$

$= (x^2-x+1)e^x - \begin{vmatrix} u=2x-1 & du=2dx \\ dv=e^x dx & v=e^x \end{vmatrix} - \left[(2x-1)e^x - 2\int e^x dx\right] =$

$= (x^2-x+1)e^x - (2x-1)e^x + 2e^x + C = (x^2-3x+4)e^x + C$.

d) $\int x\cdot\sin 3x\,dx = \begin{vmatrix} f(x)=x & g'(x)=\sin 3x \\ f'(x)=1 & g(x)=-\dfrac{1}{3}\cos 3x \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}x\cdot\cos 3x + \frac{1}{3}\int\cos 3x\,dx =$

$= -\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{9}\sin 3x + C.$

e) Wydaje się, że wyliczając tę całkę, nie możemy zastosować metody całkowania przez części, gdyż funkcja podcałkowa nie jest iloczynem dwóch funkcji. Jednak każdą funkcję można (nie zmieniając jej) pomnożyć przez jeden, a funkcja $y = 1$ jest całkowalna. Mamy zatem

$$\int \ln x dx = \begin{vmatrix} f(x)=\ln x & g'(x)=1 \\ f'(x)=\frac{1}{x} & g(x)=x \end{vmatrix} = x\ln x - \int \frac{1}{x}\cdot x dx = x\ln x - \int dx =$$

$$= x\ln x - x + C\,.$$

Całkowanie z zastosowaniem wzorów rekurencyjnych

Wzorem rekurencyjnym nazywamy wzór określający *n*-ty wyraz ciągu (tu: ciągu całek) w taki sposób, że określony jest początkowy wyraz ciągu (lub skończona liczba wyrazów początkowych), a każdy wyraz ciągu jest określony za pomocą wyrazów poprzednich. Zatem sposób określenia *n*-tego wyrazu ciągu: $a_n = n^2 + 1$ nie jest rekurencyjny, natomiast sposób: $a_1 = 2,\ \ a_n = a_{n-1} + 2n - 1,\ n \geq 2$ jest rekurencyjny. Istnieje dużo wzorów rekurencyjnych dla całek. Oto jeden z nich:

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{(2n-2)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}\,.$$

Przykład *4.p.4.* Wyliczyć całki:

a) $\int \frac{dx}{(1+x^2)^3}$; b) $\int \frac{x+3}{(x^2+4x+13)^2}dx$.

Rozwiązania

a) $$\int \frac{dx}{(1+x^2)^3} = \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{4(1+x^2)^2} +$$

$$+\frac{3}{4}\left[\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2}\right] = \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3x}{8(1+x^2)} + \frac{3}{8}\operatorname{arc\,tg} x + C.$$

Przy obliczaniu powyższej całki zastosowano dwukrotnie wzór rekurencyjny.

b) $\int \frac{x+3}{(x^2+4x+13)^2}\,dx =$

(przedstawiamy trójmian kwadratowy z mianownika w postaci kanonicznej $x^2 + 4x + 13 = (x + 2)^2 + 9$

$$= \int \frac{x+3}{[(x+2)^2+9]^2}\,dx = \left|\begin{matrix} x+2=3t \\ dx=3dt \end{matrix}\right| = \int \frac{3t+1}{(9t^2+9)^2}\,3dt =$$

$$= \int \frac{9tdt}{9^2(1+t^2)^2} + \int \frac{3dt}{9^2(1+t^2)^2} = \frac{1}{9}\int \frac{tdt}{(1+t^2)^2} + \frac{1}{27}\int \frac{dt}{(1+t^2)^2} =$$

---

wyliczymy teraz oddzielnie

$$\int \frac{tdt}{(1+t^2)^2} = \int \frac{\frac{1}{2}\cdot 2tdt}{(1+t^2)^2} = \left|\begin{matrix} 1+t^2=p \\ 2tdt=dp \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\int \frac{dp}{p^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int p^{-2}dp = \frac{1}{2}\cdot(-1)\cdot p^{-1} + C = -\frac{1}{2p} + C = -\frac{1}{2(1+t^2)} + C.$$

$$\int \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} t + C$$

(obliczając pierwszą całkę, zastosowano podstawienie, a do obliczania drugiej zastosowano wzór rekurencyjny).

$$= -\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2(1+t^2)} + \frac{1}{27}\left[\frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t\right] + C = \frac{-3+t}{54(1+t^2)} + \frac{1}{54}\operatorname{arctg} t + C =$$

(podstawimy teraz za $t = \frac{x+2}{3}$ i otrzymamy po wyliczeniu)

$$54\left[1 + \frac{x^2+4x+4}{9}\right] = 6(x^2+4x+13) \text{ oraz } -3 + \frac{x+2}{3} = \frac{x-7}{3}$$

$$= \frac{x-7}{18(x^2+4x+13)} + \frac{1}{54}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+2}{3} + C.$$

***Uwaga** 4.u.3.* Nie da się obliczyć całek:

$$\int \frac{\sin x}{x} dx, \qquad \int e^{-x^2} dx,$$

$$\int \sin(x^2) dx, \qquad \int \frac{e^x}{x^2}\, dx,$$

$$\int \frac{\cos x}{x} dx, \qquad \int \frac{dx}{\log x},$$

ponieważ nie istnieją funkcje elementarne, których pochodne są równe powyższym funkcjom podcałkowym.

4.1.3. Całkowanie funkcji wymiernych. Rozkład na ułamki proste

Wyrażenia postaci

$$\frac{A}{x-a}, \qquad \frac{A}{(x-a)^k}$$

oraz

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \qquad \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}, \qquad \Delta < 0$$

nazywamy ułamkami prostymi.

Rozkładem na ułamki proste nazywamy przedstawienie funkcji wymiernej właściwej (funkcja ułamkowa, której licznikiem i mianownikiem są wielomiany – stopień wielomianu licznika jest mniejszy od stopnia wielomianu mianownika) za pomocą sumy ułamków prostych. Poniżej przedstawiono sposoby rozpisywania na ułamki proste:

$$\frac{5x^2-2x+3}{(x-1)^2(x+2)^3} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x+2)^3} + \frac{D}{(x+2)^2} + \frac{E}{x+2},$$

$$\frac{3x^3-9}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1},$$

$$\frac{x^4}{(x-3)^2(x^2+2x+2)^2} = \frac{A}{(x-3)^2} + \frac{B}{x-3} + \frac{Cx+D}{(x^2+2x+2)^2} + \frac{Ex+F}{x^2+2x+2}.$$

Przykład *4.p.5.* Obliczyć całkę

$$\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)\cdot(x^2+1)^2}dx\,.$$

Rozkładamy najpierw funkcję podcałkową na ułamki proste:

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}\,.$$

Aby wyliczyć *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, najpierw przyrównujemy lewą i prawą stronę równania (właściwie – tożsamości), następnie prawą stronę równania sprowadzamy do wspólnego mianownika

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{A\cdot(x^2+1)^2+(Bx+C)\cdot(x-2)\cdot(x^2+1)+(Dx+E)\cdot(x-2)}{(x-2)(x^2+1)^2}\,.$$

Mianowniki z lewej i prawej strony równości są sobie równe, więc przyrównujemy liczniki; otrzymamy

$$2x^2+2x+13=A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x-2)(x^2+1)+(Dx+E)(x-2)\,.$$

Z prawej strony równania wykonujemy działanie i grupujemy wyrażenia z tymi samymi potęgami zmiennej *x*, a następnie przyrównujemy współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej *x* (wielomiany są identyczne – jeśli po prawej stronie nie ma pewnej potęgi zmiennej *x*, a po prawej jest – przyjmujemy, że po lewej stronie występuje ona ze współczynnikiem 0):

$$2x^2+2x+13=A(x^4+2x^2+1)+(Bx+C)(x^3-2x^2+x-2)+(Dx+E)(x-2)\,,$$

$$2x^2+2x+13=(A+B)\cdot x^4+(-2B+C)\cdot x^3+(A+B-2D+E)\cdot x^2+$$

$$+(-2B+C-2D+E)\cdot x+(A-2C-2E)\,.$$

Współczynniki przy x^4 $\quad A + B = 0,$

współczynniki przy x^3 $\quad -2B + C = 0,$

współczynniki przy x^2 $\quad A + B - 2C + D = 2,$

współczynniki przy x $\quad -2B + C - 2D + E = 2,$

wyrazy wolne $\quad A - 2C - 2E = 13.$

Po rozwiązaniu zapisanego układu równań otrzymujemy: $A = 1$, $B = -1$, $C = -2$, $D = -3$, $E = -4$, więc

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{1}{x-2} + \frac{-x-2}{(x^2+1)^2} + \frac{-3x-4}{x^2+1},$$

czyli całkę możemy zapisać w postaci

$$\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}dx = \int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{x+2}{\left(x^2+1\right)^2}dx - \int \frac{3x+4}{x^2+1}dx,$$

$$\int \frac{dx}{x-2} = \ln|x-2| + C,$$

$$\int \frac{x+2}{\left(x^2+1\right)^2}dx = \frac{1}{2}\cdot\int \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}dx + 2\cdot\int \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}dx,$$

$$\frac{1}{2}\cdot\int \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}dx = \left|\begin{matrix} x^2+1=t \\ 2xdx=dt \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\cdot\int t^{-2}dt = -\frac{1}{2t} = -\frac{1}{2\cdot\left(x^2+1\right)} + C,$$

$$2\cdot\int \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}dx = \text{(wzór rekurencyjny)} = 2\cdot\left[\frac{x}{2\cdot\left(x^2+1\right)} + \frac{1}{2}\cdot\operatorname{arctg} x\right] + C,$$

$$\int \frac{3x+4}{x^2+1}dx = \frac{3}{2}\cdot\int \frac{2x}{x^2+1}dx + 4\int \frac{1}{x^2+1}dx = \frac{3}{2}\cdot\ln\left(x^2+1\right) + 4\cdot\operatorname{arctg} x + C.$$

Po dodaniu wszystkich składowych całki i po redukcji wyrazów podobnych mamy:

$$\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}dx = \ln|x-2| - \frac{3}{2}\cdot\ln\left(x^2+1\right) - 5\cdot\operatorname{arctg} x + \frac{1-2x}{2\cdot\left(x^2+1\right)} + C.$$

4.1.4. Całkowanie funkcji niewymiernych. Podstawienia Eulera

Przykład *4.p.6*

$$\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{\left(x+1\right)^2-\sqrt{x+1}}dx = \left|\begin{matrix} t=\sqrt{x+1} \\ t^2=x+1 \\ 2tdt=dx \end{matrix}\right| = \int \frac{t+2}{t^4-t}2tdt = 2\int \frac{t+2}{t^3-1}dt =$$

$$= 2 \cdot \int \frac{t+2}{(t-1)(t^2+t+1)}\,dt = 2\int \frac{1}{t+1}\,dt - 2\int \frac{t+1}{t^2+t+1}\,dt.$$

Autorzy szczerze wierzą, że uważny Czytelnik potrafi dokończyć wyliczenie tej całki.

Podstawienia Eulera stosuje się do całkowania funkcji $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$.

I podstawienie Eulera

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm \sqrt{a}\,x,\ a > 0.$$

Przykład *4.p.7.*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \left| \begin{array}{c} \sqrt{x^2+a^2} = t - x \\ x^2 + a^2 = t^2 - 2tx + x^2 \\ 2tx = t^2 - a^2 \\ x = \dfrac{t^2-a^2}{2t} \\ dx = \dfrac{t^2+a^2}{2t^2}\,dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{t^2+a^2}{2t^2}\,dt}{\frac{t^2+a^2}{2t}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a^2}\right| + C.$$

II podstawienie Eulera

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c},\ c > 0.$$

Przykład *4.p.8.*

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}} = \left| \begin{array}{c} \sqrt{x^2-x+1} = tx - 1 \\ x^2 - x + 1 = t^2x^2 - 2tx + 1 \\ x - 1 = t^2x - 2t \\ t^2x - x = 2t - 1 \\ x = \frac{2t-1}{t^2-1} \\ dx = -2\frac{t^2-t+1}{(t^2-1)^2}\,dt \end{array} \right| = -2\int \frac{\frac{t^2-t+1}{(t^2-1)^2}}{\frac{t}{t-1}}dt =$$

$$= \int \frac{-2t^2+2t-2}{t(t-1)(t+1)^2}dt = \frac{3}{t+1} + 2\ln|t| - \tfrac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{3}{2}\ln|t+1| + C = \frac{3x}{\sqrt{x^2-x+1}+x+1} +$$

$$+2\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+1}+1}{x}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+1}+1-x}{x}\right| - \frac{3}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+1}+1+x}{x}\right| + C$$

III podstawienie Eulera

Jeśli trójmian kwadratowy ma pierwiastki, np. niech jednym z nich jest λ, to

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\lambda).$$

Przykład *4.p.9.*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{a^2-x^2} = t(a-x) \\ a^2-x^2 = t^2(a-x)^2 \\ (a-x)(a+x) = t^2(a-x)^2 \\ a+x = t^2(a-x) \\ a+x = t^2a - t^2x \\ t^2x + x = t^2a - a \\ x = a\frac{t^2-1}{t^2+1} \\ dx = a\frac{4t}{(t^2+1)^2}dt \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \sqrt{a^2-x^2} = t(a - a\frac{t^2-1}{t^2+1}) = \\ = a - \frac{t^2+1-t^2+1}{t^2+1} = a - \frac{2at}{t^2+1} \end{array} \right| \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{4at}{(t^2+1)^2}}{\frac{2at}{t^2+1}}dt = 2\cdot\int\frac{dt}{t^2+1} = 2\cdot\operatorname{arctg}t + C = 2\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + C.$$

4.1.5. Całkowanie funkcji zawierających wyrażenia trygonometryczne

Funkcje postaci *R*(sin *x*,cos *x*)

Przykład *4.p.10.* Zaczniemy od wprowadzenia tzw. „podstawienia uniwersalnego”:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}x = t,$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$x = 2\operatorname{arctg} t\,, \quad dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}\,.$

Obliczymy całkę

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{matrix} x = \sin t \\ dx = \cos t \end{matrix} \right| = \int \frac{\cos(t)dt}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \int \frac{\cos t}{\cos t} dt = \int dt = t + C = \arcsin(x) + C.$$

Zadanie *4.z.1.* Wylicz następujące całki nieoznaczone

a) $\int \dfrac{\left(\sqrt{x}-2x\right)^2}{x\sqrt{x}}\,dx$; b) $\int x^2 \ln x\; dx$; c) $\int x\sin 2x\; dx$; d) $\int \left(\sqrt{x}-\cos 3x\right)dx$;

e) $\int \dfrac{\left(x-\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x}}\,dx$; f) $\int x\cos 4x\; dx$; g) $\int \left(\sqrt{x}+2\ln x\right)dx$; h) $\int (2x+3)e^{-x}dx$;

i) $\int xe^{-x^2+3}dx$; j) $\int \left(3-x^2\right)^5 xdx$; k) $\int (x+2)\sin 3x\; dx$;

l) $\int (2x+5)\cos\left(x^2+5x+7\right)dx$; m) $\int (2x-1)\ln x\; dx$; n) $\int (2x+3)e^{x^2+3x-1}dx$;

o) $\int \dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+x\right)}{x}dx$ p) $\int (2x+5)e^{2x}dx$; r) $\int \dfrac{x^2+2x+4}{x^2+1}dx$; s) $\int \dfrac{x^2-3}{x^2+1}dx$;

t) $\int \sqrt{x}\cdot\ln x dx$; u) $\int \ln(x-1)dx$; w) $\int \dfrac{3x-1}{(x-3)\cdot(x+5)}dx$; y) $\int \dfrac{4x+19}{x^2+5x+4}dx$.

Odpowiedzi

a) $2\sqrt{x}-4x+\dfrac{8}{3}x\sqrt{x}+C$; b) $\dfrac{1}{3}x^3\left(\ln x-\dfrac{1}{3}\right)+C$;

c) $-\dfrac{1}{2}x\cos 2x+\dfrac{1}{4}\sin 2x+C$; d) $\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}-\dfrac{1}{3}\sin 3x+C$;

e) $\dfrac{2}{5}x^2\sqrt{x}-x^2+\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+C$; f) $\dfrac{1}{4}x\sin 4x+\dfrac{1}{16}\cos 4x+C$;

g) $\dfrac{3}{2}x\sqrt{x}+2x\ln x-2x+C$; h) $-(2x+5)e^{-x}+C$; i) $-\dfrac{1}{2}e^{-x^2+3}+C$;

j) $-\dfrac{\left(3-x^2\right)^6}{12}+C$; k) $-\dfrac{(x+2)\cos 3x}{3}+\dfrac{1}{9}\sin 3x+C$; l) $\sin\left(x^2+5x+7\right)+C$;

m) $\left(x^2-x\right)\ln x-\frac{1}{2}x^2+x+C$; n) $e^{x^2+3x-1}+C$; o) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}-2\sqrt{x}+C$;

p) $\frac{2x+5}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x}+C$; r) $x+\ln\left(x^2+1\right)+3\cdot\operatorname{arctg}x+C$; s) $x-4\cdot\operatorname{arctg}xC$;

t) $\frac{2}{3}\cdot x\cdot\sqrt{x}\cdot\left(\ln x-\frac{2}{3}\right)+C$; u) $x\cdot\ln\left(x-1\right)-x-\ln\left(x-1\right)+C$;

w) $\ln\left|x-3\right|+2\cdot\ln\left|x+5\right|+C$; y) $5\cdot\ln\left|x+1\right|-\ln\left|x+4\right|+C$.

4.2. Całka oznaczona

Definicja *4.d.3.* Niech będzie dana funkcja $y=f(x)$, ciągła w przedziale domkniętym $\langle a,b\rangle$, i jej funkcja pierwotna $y=F(x)$. Całką oznaczoną funkcji $f(x)$ w przedziale $\langle a,b\rangle$ nazywamy różnicę $F(b)-F(a)$ i oznaczamy ją: $\int_a^b f(x)dx$.

Liczbę *a* nazywamy dolną granicą całkowania, a liczbę *b* – górną granicą całkowania. Można zatem zapisać:

(4.1) $$\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a).$$

Własności całek oznaczonych

$$a\le x\le b,$$

$$\int_a^b\alpha\cdot f(x)dx=\alpha\cdot\int_a^b f(x)dx,$$

$$\int_a^b\left(f(x)\pm g(x)\right)dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx,$$

$$a<c<b\Rightarrow\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

Przykład *4.p.11*. Wyliczyć całkę oznaczoną $\int_{-2}^{3}\left(3x^2-4x+7\right)dx$.

Rozwiązanie

I sposób:

$$\int_{-2}^{3}\left(3x^2-4x+7\right)dx=\left[3\cdot\frac{1}{3}x^3-4\cdot\frac{1}{2}x^2+7x\right]_{-2}^{3}=$$

$$=\left(1\cdot 3^3-2\cdot 3^2+7\cdot 3\right)-\left(1\cdot(-2)^3-2\cdot(-2)^2+7\cdot(-2)\right)=$$

$$=(27-18+21)-(-8-8-14)=30-(-30)=60.$$

II sposób (korzystamy z własności całek oznaczonych):

$$\int_{-2}^{3}\left(3x^2-4x+7\right)dx=\ 3\cdot\int_{-2}^{3}x^2\,dx-4\cdot\int_{-2}^{3}x\,dx+7\cdot\int_{-2}^{3}1\cdot dx=$$

$$=3\cdot\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{3}-4\cdot\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{3}+7\cdot\left[\frac{1}{1}x\right]_{-2}^{3}=$$

$$=3\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_{-2}^{3}-4\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_{-2}^{3}+7\cdot 1\cdot\left[x\right]_{-2}^{3}=$$

$$=\left(3^3-(-2)^3\right)-2\cdot\left(3^2-(-2)^2\right)+7\cdot(3-(-2))=(27+8)-2\cdot(9-4)+7\cdot(3+2)=$$

$$=35-10+35=60.$$

Odpowiedź: Powyższa całka oznaczona jest równa 60.

Autorzy uważają, że drugi sposób jest zdecydowanie korzystniejszy z obliczeniowego punktu widzenia.

Zadanie *4.z.2*. Wyliczyć całki oznaczone:

a) $\int_{2}^{e}\frac{1}{x-1}dx$; b) $\int_{-2}^{2}(x-1)\cdot\left(x^2-2\right)dx$; c) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x dx$.

Odpowiedzi

a) $\ln(e-1)$; b) $\frac{8}{3}$; c) 0.

4.3. Całka Riemanna

Niech będzie dana funkcja $y = f(x)$ określona w przedziale $\langle a,b\rangle$. Określimy ***podział*** Π odcinka $\langle a,b\rangle$ na k części, $\Pi : a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_k = b$. Długość największego odcinka tego podziału nazwiemy jego średnicą $\delta(\Pi)$, zatem $\delta(\Pi) = \max_{i=1,...,k}(x_i - x_{i-1})$.

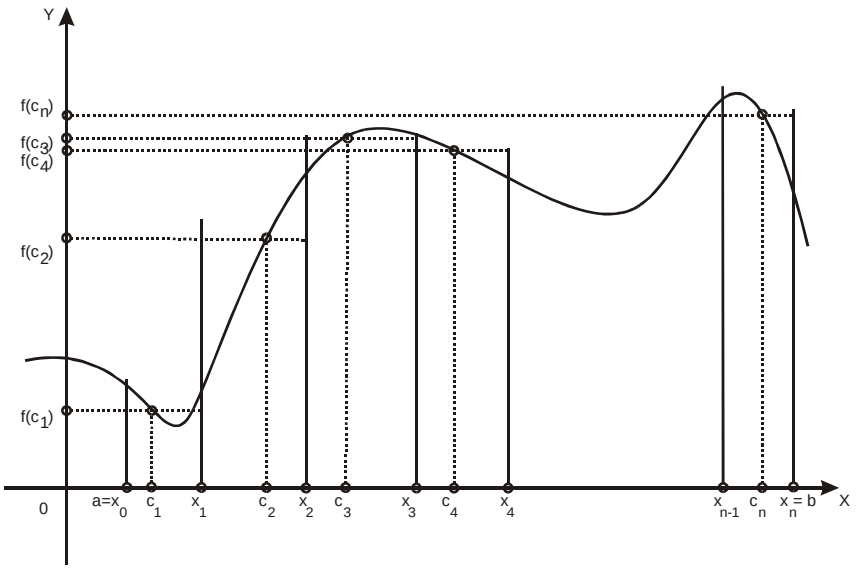
W każdym z przedziałów $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ wybieramy jeden punkt c_i $(x_{i-1} \le c_i \le x_i)$ i nazywamy go ***punktem pośrednim***.

Definicja *4.d.4.* Sumą Riemanna funkcji $y = f(x)$ w przedziale $\langle a,b\rangle$ dla podziału Π, przy ustalonym wyborze punktów pośrednich c_i, nazywamy liczbę

$$R(\Pi) = \sum_{i=1}^{k} f(c_i)\cdot(x_i - x_{i-1}).$$

Jeśli oznaczymy różnicę $x_i - x_{i-1}$ przez Δx_i, to średnicę podziału Π możemy zdefiniować: $\delta(\Pi) = \max_{i=1,...,k} \Delta x_i$, a suma Riemanna przybierze postać

$$R(\Pi) = \sum_{i=1}^{k} f(c_i)\cdot \Delta x_i .$$



Rysunek 4.1

Oczywiście, w przedziale $\langle a,b\rangle$ możemy określić dowolną liczbę podziałów, mających na przykład coraz większą liczbę punktów i różne średnice. Zatem możemy określić nieskończony ciąg podziałów (tego samego odcinka $\langle a,b\rangle$).

Definicja *4.d.5*. Nieskończony ciąg podziałów $\left(\Pi^{(n)}\right)_{n\in N}$ przedziału $\langle a,b\rangle$ nazywamy normalnym, jeśli $\lim\limits_{n\to\infty}\delta\left(\Pi^{(n)}\right)=0$.

Z definicji ciągu normalnego podziałów wynika, że liczba $k^{(n)}$ odcinków, na które podzielony jest przedział $\langle a,b\rangle$, rośnie (niekoniecznie monotonicznie) do nieskończoności, co więcej, długości wszystkich tych odcinków zmniejszają się „mniej więcej" równomiernie.

Za pomocą powyższych pojęć zdefiniujemy całkę Riemanna.

Definicja *4.d.6*. Niech będzie dana funkcja $y=f(x)$ określona w przedziale $\langle a,b\rangle$. Jeżeli dla każdego ciągu podziałów normalnych $\left(\Pi^{(n)}\right)_{n\in N}$ przy dowolnie obranych punktach pośrednich $c_i^{(n)}$ istnieje granica właściwa $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{k^{(n)}} f\left(c_i^{(n)}\right)\cdot\Delta x_i^{(n)}$, to granicę tę nazywamy ***całką Riemanna*** funkcji $f(x)$ w przedziale $\langle a,b\rangle$ i oznaczamy $\int\limits_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)dx$ (jest to oznaczenie tymczasowe, poniżej opisano, dlaczego).

Możemy zatem zapisać:

$$\int_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k^{(n)}} f\left(c_i^{(n)}\right)\cdot\Delta x_i^{(n)},$$

o ile granica po lewej stronie znaku równości istnieje.

Pozostaje wskazać związek między opisaną wcześniej całką oznaczoną funkcji ciągłej a całką Riemanna. Związek ten opisuje następujące twierdzenie:

Twierdzenie *4.t.2* (***Newtona-Leibniza***). Jeżeli funkcja $y=f(x)$ jest ciągła w przedziale $\langle a,b\rangle$, to jej całka Riemanna istnieje i jest równa całce oznaczonej:

$$\int_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)dx=\int_a^b f(x)dx.$$

Z powyższego twierdzenia wynika, że dla funkcji ciągłej całka oznaczona i całka Riemanna są identyczne. Zapis całki oznaczonej jest wygodniejszy, będziemy

więc stosować symbol $\int_a^b f(x)dx$ do zapisywania całki Riemanna *dowolnej funkcji*, dla której ta całka istnieje (przy czym dla funkcji ciągłej będzie to oczywiście $F(b)-F(a)$).

Istnieją funkcje, dla których nie istnieje całka oznaczona, a istnieje całka Riemanna. Są to na przykład funkcje, które mają punkty nieciągłości. Zarówno całka oznaczona, jak i całka Riemanna istnieją tylko dla funkcji ograniczonych. Istnieje bardzo wiele zastosowań całek Riemanna w naukach stosowanych, zwłaszcza w ekonomii i naukach technicznych, gdzie są wręcz niezbędnym narzędziem opisu rzeczywistości.

Aby zastosować całkę Riemanna (czyli całkę oznaczoną), należy we wzorze

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k^{(n)}} f\left(c_i^{(n)}\right)\cdot \Delta x_i^{(n)}$$

odpowiednio zinterpretować istotę wyrażenia: $f\left(c_i^{(n)}\right)\cdot \Delta x_i^{(n)}$. Jest to wartość funkcji na „niewielkim" przedziale (niewielkim w stosunku do całego przedziału sumowania) pomnożona przez długość tego przedziału. Na rysunku 4.1 jest to pole prostokąta o „niewielkiej" szerokości. Suma tych pól przybliża pole obszaru między wykresem funkcji a osią *Ox*. Ale interpretacja całki oznaczonej wynikająca z całki Riemanna pozwala obliczać wielkości, które są efektem procesu sumowania wystarczająco małych elementów. Jeśli zimą dozorca odśnieża za pomocą łopaty alejkę parkową długości 100 metrów, odkładając odgarnięty śnieg na brzeg alejki, a równoległą alejkę odśnieża inny dozorca za pomocą pługa doczepionego do minitraktorka, to ten pierwszy działa za pomocą sumy Riemanna, a ten drugi – całkuje w sensie Riemanna. Czytelnik sam zdecyduje, co by wolał robić.

Przykład *4.p.12*. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi: $y = 2x^2 + x - 15$ oraz $y = -x^2 - 5x + 9$.

Rozwiązanie

Całka oznaczona jest równa polu obszaru między krzywą wyrażoną funkcją podcałkową, osią *Ox* oraz prostymi pionowymi przechodzącymi przez granice przedziału całkowania. Zatem pole obszaru ograniczonego krzywymi jest równe całce oznaczonej różnicy równań krzywych („wyższa" minus „niższa"), a granicami całkowania są punkty przecięcia krzywych.

$2x^2 + x - 15 = -x^2 - 5x + 9$,

$3x^2 + 6x - 24 = 0$,

$x_1 = -4, \quad x_2 = 2.$

$$P = \int_{-4}^{2} \left[-x^2 - 5x + 9 - \left(2x^2 + x + 9\right) \right] dx = \int_{-4}^{2} \left(-3x^2 - 6x + 24\right) dx =$$

$$= -3 \cdot \int_{-4}^{2} x^2 dx - 6 \cdot \int_{-4}^{2} x dx + 24 \cdot \int_{-4}^{2} dx = -3 \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-4}^{2} - 6 \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-4}^{2} + 24 \cdot [x]_{-4}^{2} =$$

$$= -\left(2^3 - (-4)^3\right) - 3 \cdot \left(2^2 - (-4)^2\right) + 24 \cdot (2 - (-4)) = -72 + 36 + 144 = 108 \left[j^2\right].$$

Odpowiedź: Pole obszaru ograniczonego wykresami powyższych funkcji jest równe 108 [j^2].

Przykład *4.p.13.* Zysk z pracy urządzenia liczony w tysiącach euro w skali roku wyraża się wzorem $\frac{4}{1+t^2}$, a koszt eksploatacji wzorem $\frac{1}{2525} t^2$, gdzie t – czas eksploatacji urządzenia liczony w latach. Jaki jest okres efektywnej eksploatacji urządzenia? Jaki zysk całkowity wypracuje urządzenie w całym okresie eksploatacji?

Urządzenie przestanie „zarabiać na siebie”, gdy zysk zrówna się z kosztem eksploatacji ($t > 0$)

$$\frac{4}{1+t^2} = \frac{1}{2525} \cdot t^2 ,$$

$$t^4 + t - 10\,100 = 0,$$

$$t = 10.$$

Aby obliczyć zysk całkowity, liczymy całkę:

$$\int_0^{10} \left(\frac{4}{1+t^2} - \frac{1}{2525} t^2 \right) dt = 4 \cdot \left[\operatorname{arctg} t \right]_0^{10} - \frac{1}{2525} \cdot \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{10} \approx$$

$$\approx 5{,}8845 - 0{,}132 = 5{,}7525.$$

Odpowiedź: Zysk całkowity z okresu eksploatacji jest równy 5,7525 tys. euro.

***Zadanie** 4.z.3.* Oblicz pole obszaru ograniczonego wykresem funkcji:

a) $y = x^2 + 3x + 1,\ y = x + 4$; b) $y = x^2 - x - 2,\ y = x + 1$;

c) $y = x^2 + x + 3,\ y = -x^2 - 3x + 9$; d) $y = -x^2 + 3x - 2,\ y = -x + 1$;

e) $y = -x^2 + x + 6,\ y = x^2 + x - 2$; f) $y = x^2 + 5x - 2,\ y = x - 2$;

g) $y = -x^2 - 2x + 1,\ y = x^2 - 2x - 1$; h) $y = 4x^2 + x + 1,\ y = x^2 + x + 4$;

i) $y = x + 3,\ y = x^2 - 2x + 3$.

Odpowiedzi

a) $\frac{32}{3}$; b) $\frac{32}{3}$; c) $\frac{64}{3}$; d) $\frac{4}{3}$; e) $\frac{32}{3}$; f) $\frac{32}{3}$; g) $\frac{8}{3}$; h) 4; i) $\frac{9}{2}$.

5. Funkcje wielu zmiennych

5.1. Pojęcia podstawowe

Określenie zbioru *n*-wymiarowego

***Definicja** 5.d.1.* Zbiór *X* nazywamy zbiorem *n*-wymiarowym, jeżeli każdemu elementowi tego zbioru możemy przyporządkować dokładnie jedną *n*-tkę liczb rzeczywistych, tzn. $P \in X$, gdy $P = (x_1, x_2, ..., x_n)$, gdzie $x_i \in R$ dla $i = 1, 2, ..., n$.

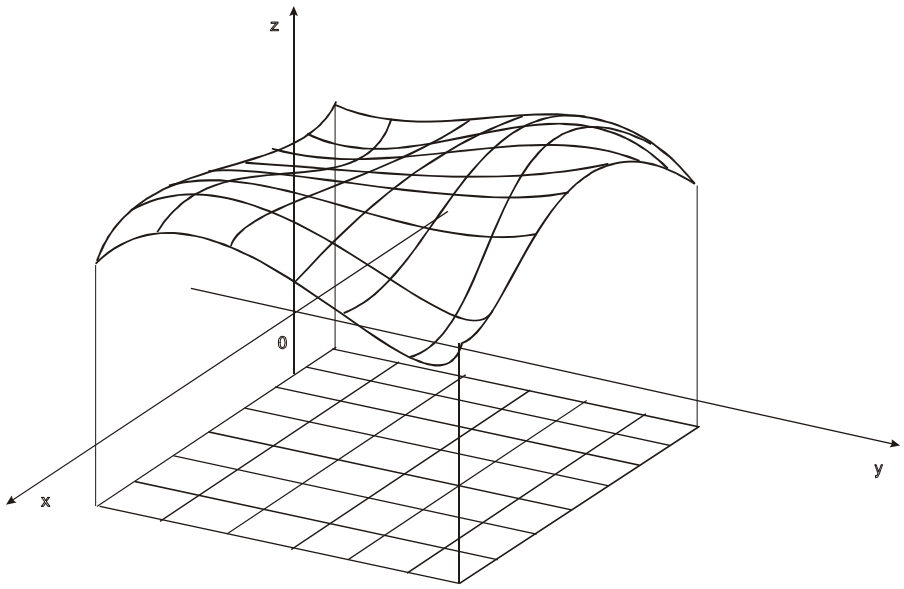
Określenie funkcji *n* zmiennych

***Definicja** 5.d.2.* Niech *X* będzie zbiorem *n*-wymiarowym, a *Z* podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych *R*; wówczas odwzorowanie, które każdemu elementowi ze zbioru *X* przyporządkowuje dokładnie jeden element ze zbioru *Z*, nazywamy funkcją *n* zmiennych i zapisujemy: $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ lub krócej $z = f(P)$. *X* nazywamy dziedziną funkcji, a *Z* zbiorem wartości funkcji.

W naszym opracowaniu będziemy w zasadzie mówili o funkcjach dwóch zmiennych, które można zapisać $z = f(x, y)$.

Interpretacja geometryczna funkcji dwóch zmiennych

Niech *X* będzie dziedziną funkcji $z = f(x, y)$, a *Z* jej zbiorem wartości; wówczas dla $P_1 = (x_1, y_1) \in X \qquad f(x_1, y_1) = z_1 \in Z$. Otrzymujemy więc punkt $P_1' = (x_1, y_1, z_1)$, który możemy nanieść w przestrzeni trójwymiarowej; podobnie dla $P_2 = (x_2, y_2) \in X$ otrzymujemy odpowiedni punkt P_2' itd., dla $P_n \in X$ otrzymamy odpowiedni punkt P_n'; gdy punkty P_1, P_2, ..., P_n... wyczerpią cały zbiór *X*, wtedy ich odpowiedniki P_1', P_2', ..., P_n'... utworzą powierzchnię znajdującą się w przestrzeni trójwymiarowej, więc w interpretacji geometrycznej ***funkcja dwóch zmiennych jest powierzchnią***.



Rysunek 5.1

5.2. Granica funkcji dwóch zmiennych

Zagadnienia związane z pojęciem i obliczeniami granicy funkcji dwóch (i więcej) zmiennych są bardziej złożone niż w przypadku funkcji jednej zmiennej. Dziedziną funkcji dwóch zmiennych jest bowiem pewien ***obszar***, a nie przedział.

Definicja *5.d.3.* Ciągiem punktów w obszarze *D* płaszczyzny kartezjańskiej *xOy* nazywamy funkcję $a(n) = (x(n), y(n))$, gdzie $x(n)$ i $y(n)$ (lub (x_n) *i* (y_n)) są ciągami liczbowymi, a wszystkie punkty $P_n = (x(n), y(n))$ należą do obszaru *D*.

A zatem ciąg punktów możemy określić jako ciąg uporządkowanych par liczb.

Odległość między dwoma punktami na płaszczyźnie kartezjańskiej określić można wzorem:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2},$$

gdzie $A = (x_a, y_a)$, $B = (x_b, y_b)$.

Teraz już łatwo możemy zdefiniować granicę ciągu punktów, którą – oczywiście – będzie punkt.

Definicja *5.d.4.* Niech będzie dany ciąg punktów $P_n = (x_n, y_n)$ w obszarze D. Mówimy, że ciąg (P_n) jest zbieżny do punktu $P_0 = (x_0, y_0)$, jeśli $\lim_{n\to\infty} d(P_n, P_0) = 0$.

Definicja granicy funkcji dwóch zmiennych w punkcie, którą teraz podamy, będzie analogonem znanej Czytelnikowi jeszcze ze szkoły średniej (taką nadzieję mają autorzy) definicji granicy funkcji w sensie Heinego.

Definicja *5.d.5.* Niech będzie dana funkcja $z = f(x,y)$, określona w każdym punkcie obszaru D, oraz punkt $P_0 = (x_0, y_0)$. Mówimy, że granicą funkcji f(x,y) w punkcie P_0 jest liczba g, jeśli dla *każdego* ciągu punktów (x_n, y_n) z obszaru D, zbieżnego do P_0, odpowiedni ciąg liczbowy wartości funkcji: $z_n = f(x_n, y_n)$ ma granicę $\lim_{n\to\infty} z_n = g$.

Możemy to zapisać:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = g \text{ lub } \lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y) = g \text{, czy wreszcie } \lim_{P\to P_0} f(P) = g .$$

Należy nadmienić, że w powyższej definicji nie wymaga się, aby punkt P_0 należał do obszaru D. Jednak jeśli „powiększymy wymagania" w stosunku do punktu P_0, to otrzymamy inną ważną własność funkcji, a mianowicie ***ciągłość*** w punkcie.

Definicja *5.d.6.* Niech będzie dana funkcja $z = f(x,y)$, określona w każdym punkcie obszaru D, oraz punkt $P_0 = (x_0, y_0)$ z tego obszaru. Mówimy, że funkcja $f(x,y)$ jest ***ciągła*** w punkcie P_0, jeśli $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$.

Uwaga *5.u.1.* Mówimy, że funkcja $z = f(x,y)$ jest ciągła w obszarze D, jeśli jest ciągła w każdym punkcie tego obszaru.

5.3. Pochodne cząstkowe funkcji dwóch zmiennych

Pojęcie pochodnej funkcji wielu zmiennych nie istnieje. Istnieje natomiast pojęcie różniczkowalności funkcji wielu zmiennych. Nie ma pochodnej „w ogóle", ale pochodna „względem ustalonej zmiennej" lub (o tym w tej książce nie piszemy) „w ustalonym kierunku".

Definicja *5.d.7.* Jeśli istnieje granica

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x,y)}{h},$$

to nazywamy ją pochodną cząstkową funkcji $z = f(x, y)$ względem zmiennej x i zapisujemy ją w jeden z następujących sposobów:

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \partial_x f,\ \partial_x z,\ f_x,\ z_x.$$

Definicja *5.d.8*. Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{k\to 0}\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k},$$

to nazywamy ją pochodną cząstkową funkcji $z = f(x, y)$ względem zmiennej y i zapisujemy ją w jeden z następujących sposobów:

$$\frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \partial_y f,\ \partial_y z,\ f_y,\ z_y.$$

Z definicji 5.d.7 i 5.d.8 wynika, że gdy obliczamy pochodną cząstkową funkcji względem zmiennej *x*, wówczas *y* się nie zmienia, więc należy ją traktować jako stałą. Analogicznie – przy obliczaniu pochodnej cząstkowej względem zmiennej *y – x* traktujemy jako stałą, a wyliczenie pochodnej cząstkowej odbywa się tak jak obliczanie pochodnej dla funkcji jednej zmiennej.

Przykład *5.p.1*. Wyliczyć pochodne cząstkowe następujących funkcji:

a) $z = 3x^2 - 2xy + 4y^3 + 6x - 7y + 8$; b) $z = \dfrac{x+3y}{x^2+y^2}$;

c) $z = \sqrt{x^4 + 4y^2 + 7}$; d) $z = (x+y)e^{x^2+2y^2}$.

Rozwiązania

Dziedziną wszystkich wymienionych wyżej funkcji jest $R^2 = R \times R$, czyli zbiór wszystkich par liczb rzeczywistych.

a) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 6x - 2y + 6$; $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial y} = -2x + 12y^2 - 7$;

b) $\partial_x z = \dfrac{1\cdot(x^2+y^2)-(x+3y)\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \dfrac{-x^2+y^2-6xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$,

$$\partial_y z = \frac{3x^2+3y^2-2xy-6y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{3x^2-3y^2-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2};$$

c) $z_x = \dfrac{1}{2\sqrt{x^4+4y^2+7}} \cdot 4x^3 = \dfrac{2x^3}{\sqrt{x^4+4y^2+7}}$,

$z_y = \dfrac{1}{2\sqrt{x^4+4y^2+7}} \cdot 8y = \dfrac{4y}{\sqrt{x^4+4y^2+7}}$;

d) $z_x = 1 \cdot e^{x^2+2y^2} + (x+y)e^{x^2+2y^2} \cdot 2x = \left(1+2x^2+2xy\right)e^{x^2+2y^2}$,

$z_y = 1 \cdot e^{x^2+2y^2} + (x+y)e^{x^2+2y^2} \cdot 4y = \left(1+4xy+4y^2\right)e^{x^2+2y^2}$.

Uwaga *5.u.2.* Wyliczane w podanych przykładach pochodne nazywamy często pochodnymi cząstkowymi pierwszego rzędu.

Zadania

Zadanie *5.z.1.* Obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu dla następujących funkcji:

a) $z = 4x^2 - 7xy + 3y^2 + 7x - 9y + 8$; b) $z = \frac{1}{3}x^3 + 4x^2y - \frac{1}{2}y^2 + 3xy^2 - 3x - y$;

c) $z = \dfrac{x+y}{x-y}$; d) $p = \dfrac{u^2-v^2}{u^2+v^2}$; e) $r = \sqrt{x^2+y^2}$; f) $T = (p-q)\cdot e^{p+q}$;

g) $L = t^2 + 3te^{u+t}$; h) $R = \dfrac{e^{u^2-v^2}}{u^2+v^2}$; i) $N = r \cdot e^{\sqrt{r^2+s^2}}$; j) $M = \ln\left(9+u^2+p^2\right)$;

k) $P = \sqrt{\dfrac{r+q}{r-q}}$.

Odpowiedzi

a) $z_x = 8x - 7y + 7$, $z_y = -7x + 6y - 9$;

b) $z_x = x^2 + 8xy + 3y^2 - 3$, $z_y = 4x^2 - y + 6xy - 1$;

c) $z_x = \dfrac{-2y}{(x-y)^2}$, $z_y = \dfrac{2x}{(x-y)^2}$;

d) $p_u = \dfrac{4uv^2}{\left(u^2+v^2\right)^2}$, $\quad p_v = \dfrac{-4u^2v}{\left(u^2+v^2\right)^2}$;

e) $r_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\quad r_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

f) $T_p = (1+p-q)\cdot e^{p+q}$, $\quad T_q = (p-q-1)\cdot e^{p+q}$;

g) $L_t = 2t + (3+3t)\cdot e^{u+t}$, $\quad L_u = 3t\cdot e^{u+t}$;

h) $R_u = \dfrac{2u\cdot\left(u^2+v^2-1\right)}{\left(u^2+v^2\right)^2}\cdot e^{u^2+v^2}$, $\quad R_v = \dfrac{-2v\cdot\left(u^2+v^2+1\right)}{\left(u^2+v^2\right)^2}\cdot e^{u^2+v^2}$;

i) $N_r = \left(1+\dfrac{r^2}{\sqrt{r^2+s^2}}\right)\cdot e^{\sqrt{r^2+s^2}}$, $\quad N_s = \dfrac{rs}{\sqrt{r^2+s^2}}\cdot e^{\sqrt{r^2+s^2}}$;

j) $M_u = \dfrac{2u}{9+u^2+p^2}$, $\quad M_p = \dfrac{2p}{9+u^2+p^2}$;

k) $P_r = -\dfrac{q}{(r-q)^2}\cdot\sqrt{\dfrac{r-q}{r+q}}$, $\quad P_q = \dfrac{r}{(r-q)^2}\cdot\sqrt{\dfrac{r-q}{r+q}}$.

5.4. Pochodne cząstkowe wyższych rzędów

W przykładowych rozwiązaniach można zauważyć, że wyliczone pochodne cząstkowe są również funkcjami dwóch zmiennych, więc z tych funkcji można wyliczyć ich pochodne cząstkowe, które nazywamy pochodnymi cząstkowymi drugiego rzędu.

Definicja *5.d.9.* Wprowadzimy oznaczenia:

$$g(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x}\ ,\quad h(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y};$$

jeśli powyższe pochodne cząstkowe istnieją, to pochodne cząstkowe drugiego rzędu określamy poniższymi wzorami:

– pochodna cząstkowa drugiego rzędu liczona względem zmiennej *x*:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z_{xx};$$

– pochodna cząstkowa drugiego rzędu liczona najpierw względem zmiennej *x*, a następnie względem zmiennej *y*:

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z_{yx};$$

– pochodna cząstkowa drugiego rzędu liczona najpierw względem zmiennej *y*, a następnie względem zmiennej *x*:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z_{xy};$$

– pochodna cząstkowa drugiego rzędu liczona względem zmiennej *y*:

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z_{yy}.$$

Uwaga *5.u.3*. Pochodne cząstkowe drugiego rzędu liczone względem zmiennych *x* i *y* niezależnie od kolejności ich liczenia nazywamy pochodnymi cząstkowymi mieszanymi.

Twierdzenie *5.t.1* (***Schwarza o pochodnych mieszanych***). Jeżeli pochodne cząstkowe mieszane z_{xy} oraz z_{yx} są funkcjami ciągłymi, to są one sobie równe, czyli zachodzi równość

$$z_{xy} = z_{yx}.$$

Definicja *5.d.10.* Przez analogię pochodne cząstkowe rzędów wyższych niż drugi wyliczamy jako pochodną cząstkową z pochodnej cząstkowej rzędu o jeden niższego.

Uwaga *5.u.4.* Z twierdzenia o pochodnych mieszanych wynika, że przy obliczaniu pochodnych mieszanych wyższych rzędów kolejność liczenia pochodnych nie odgrywa roli, gdy odpowiednie wyliczane pochodne są funkcjami ciągłymi.

Na przykład, aby wyliczyć pochodną $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, musimy liczyć pochodną kolejno trzy razy – w tym dwa razy względem zmiennej *x* i raz względem zmiennej *y*, a kolejność liczenia tych pochodnych jest dowolna. Oznacza to, że możemy liczyć najpierw pochodną cząstkową względem zmiennej *x*, z tego wyniku pochodną cząstkową względem zmiennej *x*, a następnie z otrzymanej funkcji – pochodną

cząstkową względem zmiennej *y*; możemy jednak postąpić inaczej, mianowicie: wyliczyć najpierw pochodną względem *x*, potem kolejno względem *y* i względem *x* albo: najpierw względem *y*, a następnie dwa razy względem *x*.

Przykład *5.p.2*. Obliczyć pochodną cząstkową $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial^2 y}$ dla funkcji $z = \cos x\, e^{x+2y}$.

Rozwiązanie

Dziedziną jest zbiór wszystkich par liczb rzeczywistych, czyli $R^2 = R \times R$.

Pochodną $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial^2 y}$ wyliczymy, stosując różne kolejności liczenia pochodnych:

1) $z_x = -\sin x\, e^{x+2y} + \cos x\, e^{x+2y} \cdot 1 = \left(-\sin x + \cos x\right) e^{x+2y}$,

$z_{yx} = \left(-\sin x + \cos x\right) e^{x+2y} \cdot 2 = \left(-2\sin x + 2\cos x\right) e^{x+2y}$,

$z_{yyx} = \left(-2\sin x + 2\cos x\right) e^{x+2y} \cdot 2 = \left(-4\sin x + 4\cos x\right) e^{x+2y}$.

2) $z_y = \cos x\, e^{x+2y} \cdot 2 = 2\cos x\, e^{x+2y}$,

$z_{xy} = -2\sin x\, e^{x+2y} + 2\cos x\, e^{x+2y} = \left(-2\sin x + 2\cos x\right) e^{x+2y}$,

$z_{yxy} = \left(-2\sin x + 2\cos x\right) e^{x+2y} \cdot 2 = \left(-4\sin x + 4\cos x\right) e^{x+2y}$.

3) $z_y = \cos x\, e^{x+2y} \cdot 2 = 2\cos x\, e^{x+2y}$,

$z_{yy} = 2\cos x\, e^{x+2y} \cdot 2 = 4\cos x\, e^{x+2y}$,

$z_{xyy} = -4\sin x\, e^{x+2y} + 4\cos x\, e^{x+2y} \cdot 1 = \left(-4\sin x + 4\cos x\right) e^{x+2y}$.

Wyniki uzyskane w każdym z tych przypadków są identyczne:

$z_{yyx} = z_{yxy} = z_{xyy}$.

P r z y p o m n i e n i e:

z_{yyx} oznacza, że liczyliśmy kolejne pochodne w następującej kolejności – najpierw względem *x*, następnie względem *y* oraz względem *y*.

z_{yxy} oznacza, że najpierw liczymy względem *y*, następnie względem *x* i jeszcze raz względem *y*;

z_{xyy} oznacza, że liczono kolejno względem *y*, względem *y*, względem *x*.

Zadania

***Zadanie** 5.z.2*. Wyliczyć zadane pochodne cząstkowe wyższych rzędów dla następujących funkcji:

a) z_{xxy} dla funkcji $z = \left(x^2 + y^2\right) \cdot e^{-x}$;

b) $z_{xx},\ z_{xy},\ z_{yy}$ dla funkcji $z = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}y^2 - xy + 3x - 4y + 7$;

c) z_{xyy} dla funkcji $z = (x - y) \cdot e^{x}$;

d) T_{ppq} i T_{pqq} dla funkcji $T = (2p - q)^2 \cdot e^{-q}$;

e) R_{xy} i R_{xx} dla funkcji $R = \sqrt{x^2 + y^2}$;

f) $P_{rr},\ P_{rs},\ P_{ss},\ P_{sss},\ P_{ssr},\ P_{srr},\ P_{rrr}$ dla funkcji $P = r^3 - 5rs^2 + 4s^4$.

Odpowiedzi

a) $z_{xxy} = 2y \cdot e^{-x}$;

b) $z_{xx} = 2x,\ z_{xy} = -1,\ z_{yy} = 1$;

c) $z_{xyy} = 0$;

d) $T_{ppq} = -8e^{-q}$, $T_{pqq} = (8 - 4q + 8p) \cdot e^{-q}$;

e) $R_{xy} = -\frac{xy}{\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$, $R_{xx} = \frac{y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$;

f) $P_{rr} = 6r,\ P_{rs} = -10s,\ P_{ss} = -10r + 48s^2,\ P_{sss} = 96s,\ P_{ssr} = -10,\ P_{srr} = 0,\ P_{rrr} = 6$.

5.5. Pochodne cząstkowe w punkcie

W podrozdziałach 5.3 i 5.4 opisano, jak wyliczamy pochodne cząstkowe jako funkcje. Przez analogię do pochodnych funkcji jednej zmiennej możemy również wyliczać pochodne cząstkowe w punkcie, podstawiając do wyliczonych funkcji współrzędne danego punktu.

Definicja *5.d.11.* Pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w punkcie zapisujemy:

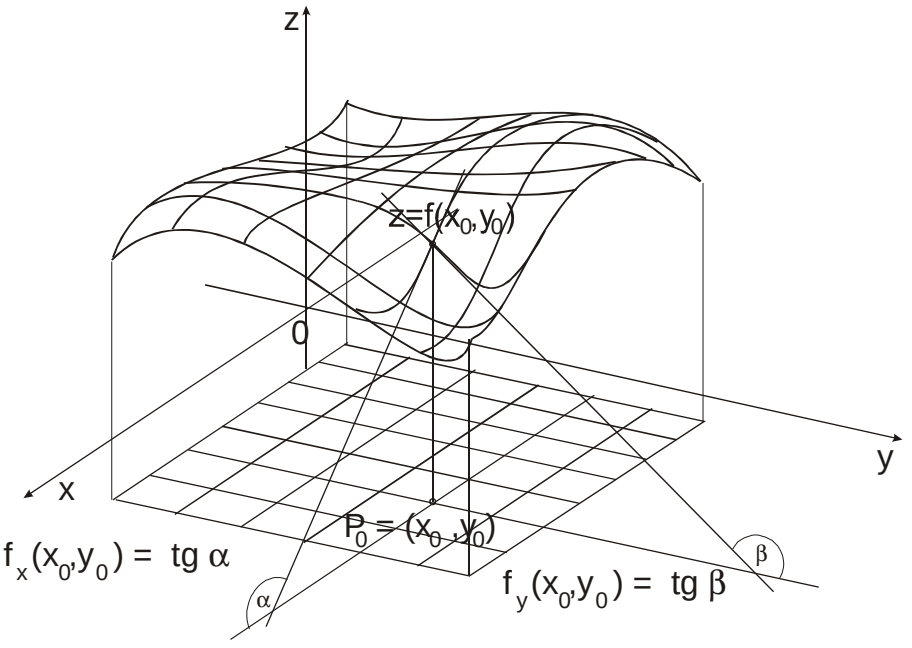
$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P=P_o}, \quad \frac{\partial z}{\partial x}(P_o), \quad \left. z_x \right|_{P=P_o} \quad \text{itd.},$$

a wyliczamy je, podstawiając do wyliczonych pochodnych cząstkowych współrzędne danego punktu.

Podobnie zapisujemy pochodne cząstkowe wyższych rzędów w punkcie, np.

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}(P_0).$$

Jak zapewne Czytelnik pamięta, wartość pochodnej funkcji jednej zmiennej w punkcie x_0 była równa tangensowi kąta nachylenia stycznej do wykresu funkcji w punkcie (x_0, y_0) do dodatniego zwrotu osi *Ox*. Podobnie wartości pochodnych cząstkowych w punkcie $P_0 = (x_0, y_0)$ są równe, odpowiednio, tangensom kątów między prostymi równoległymi do osi *Ox* i *Oy* a stycznymi do powierzchni $z = f(x,y)$ w płaszczyznach równoległych do *xOz* oraz *yOz*.



Rysunek 5.2

Przykład 5.p.3. Wyliczyć $z_{xx}\Big|_{P_0}$, gdy $z = xe^{x+y}$ dla $P_0 = (1,-1)$.

Rozwiązanie

$$z_x = 1\cdot e^{x+y} + xe^{x+y} = (1+x)\,e^{x+y}, \quad z_{xx} = 1\cdot e_{x+y} + (1+x)\,e^{x+y} = (2+x)\,e^{x+y},$$

$$z_{xx}\Big|_{P_0} = (2+1)\,e^{1-1} = 3.$$

Przykład *5.p.4.* Wyliczyć $z_{xx}\Big|_{P_0}$, $z_{yy}\Big|_{P_0}$, $z_{xy}\Big|_{P_0}$ dla funkcji $z = (x^2 + y)\,e^y$ i $P_0 = (3,0)$.

Rozwiązanie

$$z_x = 2xe^y, \quad z_y = 1\cdot e^y + (x^2+y)\,e^y\cdot 1 = \left(1+x^2+y\right)e^y,$$

$$z_{xx} = 2e^y, \quad z_{xy} = 2xe^y\cdot 1 = 2xe^y,$$

$$z_{yy} = 1\cdot e^y + (1+x^2+y)\,e^y\cdot 1 = (2+x^2+y)\,e^y,$$

$$z_{xx|(3,0)} = 2, \quad z_{xy|(3,0)} = 6, \quad z_{yy|(3,0)} = 11.$$

Dla funkcji więcej niż dwóch zmiennych pochodne cząstkowe definiujemy analogicznie.

Definicja *5.d.12.* Pochodna $\dfrac{\partial z}{\partial x_i}$ jest równa

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \lim_{p\to 0}\frac{f(x_1,...,x_i+p,...,x_n) - f(x_1,...,x_i,...,x_n)}{p},$$

a wyliczamy ją tak jak pochodną cząstkową dwóch zmiennych, czyli przy wyliczaniu jedyną zmienną jest x_i, a pozostałe zmienne traktujemy jako stałe.

Podobnie wyliczamy pochodne cząstkowe dla funkcji więcej niż dwóch zmiennych w punkcie.

5.6. Różniczka zupełna

Definicja *5.d.13*. Wyrażenie

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy$$

nazywamy różniczką zupełną funkcji dwóch zmiennych.

Definicja *5.d.14.* Wyrażenie

$$dz(P_0) = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{P_0}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{P_0}\,dy$$

nazywamy różniczką zupełną funkcji dwóch zmiennych w punkcie P_0.

Uwaga *5.u.5.* Analogicznie obliczamy różniczki zupełne oraz różniczki zupełne w punkcie dla funkcji więcej niż dwóch zmiennych.

Przykład *5.p.5.* Wyliczyć różniczkę zupełną dla następujących funkcji:

a) $z = ye^{x^2+y^2}$; b) $k = \dfrac{u-v}{u^2+v^2}$; c) $s = \sqrt{p^2+r^4}$.

Rozwiązania

W podanych przykładach dziedziną jest zbiór wszystkich par liczb rzeczywistych.

Wyliczymy najpierw pochodne cząstkowe:

a) $z_x = y\,e^{x^2+y^2}\,2x = 2xy\,e^{x^2+y^2}$, $\quad z_y = 1\cdot e^{x^2+y^2} + y\,e^{x^2+y^2}\cdot 2y =$

$= (1+2y^2)\,e^{x^2+y^2}$,

$dz = 2xy\,e^{x^2+y^2}\,dx + (1+2y^2)\,e^{x^2+y^2}\,dy.$

b) $k_u = \dfrac{1(u^2+v^2)-(u-v)2u}{\left(u^2+v^2\right)^2} = \dfrac{v^2-u^2+2uv}{\left(u^2+v^2\right)^2}$,

$k_v = \dfrac{-u^2-v^2-2uv+2v^2}{\left(u^2+v^2\right)^2} = \dfrac{v^2-u^2-2uv}{\left(u^2+v^2\right)^2}$,

$$dk = \frac{v^2 - u^2 + 2uv}{\left(u^2 + v^2\right)^2}\,du + \frac{v^2 - u^2 - 2uv}{\left(u^2 + v^2\right)^2}\,dv\,.$$

c) $s_p = \dfrac{2p}{2\sqrt{p^2 + r^4}} = \dfrac{p}{\sqrt{p^2 + r^4}}$, $s_r = \dfrac{4r^3}{2\sqrt{p^2 + r^4}} = \dfrac{2r^3}{\sqrt{p^2 + r^4}}$,

$$ds = \frac{1}{\sqrt{p^2 + r^4}}\left(p\,dp + 2r^3\,dr\right) = \frac{p\,dp + 2r^3\,dr}{\sqrt{p^2 + r^4}} \quad (p \neq 0 \ \wedge \ q \neq 0).$$

Przykład *5.p.6.* Wyliczyć różniczkę zupełną dla podanej funkcji w podanym punkcie:

a) $S = \dfrac{1}{3}\pi\, r^2 h, \quad P_0 = (2,3), \quad r = 2, \quad h = 3;$

b) $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad P_0 = (1,-2);$

c) $u = (x + y)e^{\frac{1}{2}x^2}, \quad P_0 = (0,4).$

Rozwiązania

Dla podanych przykładów dziedziną jest $R \times R$.

a) $S_r = \dfrac{2}{3}\pi rh, \quad S_h = \dfrac{1}{3}\pi r^2, \quad S_r(P_0) = 4\pi, \quad S_h(P_0) = \dfrac{4}{3}\pi,$

$$dS = 4\pi\,dr + \frac{4}{3}\pi\,dh\,.$$

b) $r_x(P_0) = \left.\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right|_{\substack{x=1\\y=-2}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $r_y = \left.\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right|_{\substack{x=1\\y=-2}} = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$,

$$dr(P_0) = \frac{1}{\sqrt{5}}\,dx - \frac{2}{\sqrt{5}}\,dy = \frac{dx - 2dy}{\sqrt{5}}.$$

c) $u_x(0,4) = 1 \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} + (x + y)\, e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot x\Big|_{\substack{x=0\\y=4}} = 1, \qquad u_y = 1 \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}\Big|_{\substack{x=0\\y=4}} = 1,$

$$du(0,4) = dx + dy\,.$$

W geometrycznej, technicznej, czy też ekonomicznej interpretacji wyrażenia: Δx, Δy, Δt itd. określają przyrosty odpowiednio zmiennych x, y, t, natomiast wyrażenia: dx, dy, dt oznaczają nieskończenie małe przyrosty zmiennych x, y, t. Uwzględniając wyżej podane określenia, widzimy, że różniczka zupełna określa

nieskończenie mały przyrost zmiennej *z*, jeśli zmienne *x* i *y* zmienią się o nieskończenie małą wartość. Oznacza to, że geometrycznie różniczka zupełna ***określa nieskończenie mały przyrost wartości funkcji przy nieskończenie małych zmianach zmiennych x, y***. Wyrażenie np. „nieskończenie mały dodatni" należy rozumieć, jako: „większy od zera, ale mniejszy od *każdej* liczby dodatniej". Takiej liczby nie ma, chyba... że będziemy rozumieć ją jako wielkość zmienną, coraz mniejszą. W rozumieniu różniczki widać przydatność pochodnej do opisu procesów dynamicznych.

5.7. Zastosowanie różniczki zupełnej

Uwaga *5.u.6.* Gdy nieskończenie małe przyrosty zmiennych *dx* i *dy* zastąpimy przez przyrosty odpowiednio Δx, Δy, a odpowiednio otrzymany przyrost wartości funkcji przez Δz, wówczas Δz będzie równy w przybliżeniu

$$\Delta z \approx f_x(P_0)\Delta x + f_y(P_0)\Delta y. \tag{5.1}$$

Wymienimy teraz niektóre zastosowania różniczki zupełnej, a następnie je omówimy:

1) do przybliżonego wyliczania wartości funkcji,
2) do szacowania błędu,
3) do wyliczania kolejnych przybliżeń rozwiązania układu równań nieliniowych.

Zastosowanie różniczki zupełnej do przybliżonego wyliczania wartości funkcji

Zakładamy, że umiemy wyliczyć wartość danej funkcji w punkcie $P_0 = (x_0, y_0)$, a chcemy wyliczyć wartość tej funkcji w punkcie $P_1 = (x_1, y_1)$, który znajduje się „blisko" punktu P_0; wówczas możemy zapisać:

$$f(p_1) = f(P_0) + \Delta z,$$

a po podstawieniu (5.1) otrzymamy:

$$f(P_1) \approx f(P_0) + f_x(P_0)\Delta x + f_y(P_0)\Delta y, \tag{5.2}$$

gdzie $\Delta x = x_1 - x_0$, a $\Delta y = y_1 - y_0$.

Dokładność otrzymanego w ten sposób wyniku będzie zależała od wypisanych różnic, które określają przyrosty (zmiany) zmiennych *x* i *y*. Większą dokładność otrzymamy, gdy wymienione przyrosty będą mniejsze.

Przykład *5.p.7.* Wyliczyć przybliżoną wartość następujących wyrażeń:

a) $0{,}97^3 - \sqrt{4{,}08}$; b) $\ln\left[0{,}02 + \sqrt{0{,}91}\right]$; c) $\sin\left(4{,}11 - 1{,}97^2\right)$.

Uwaga *5.u.7.* W podanych przykładach można łatwo wyliczyć wskazane wartości, korzystając np. z kalkulatora, ale my będziemy je wyliczali za pomocą różniczki zupełnej, aby w innych przypadkach widzieć sens jej zastosowania.

Rozwiązania

a) Najpierw wprowadzimy funkcję $f(x, y) = x^3 - \sqrt{y}$ oraz

$P_1 = (0{,}97,\ 4{,}08), \quad P_0 = (1,\ 4),$

$\Delta x = 0{,}97 - 1 = -0{,}03, \qquad \Delta y = 4{,}08 - 4 = 0{,}08;$

wyliczamy teraz kolejno:

$$f(1,4) = -1, \qquad f_x(1,4) = 3x^2\Big|_{\substack{x=1\\y=4}} = 3, \qquad f_y(1,4) = -\frac{1}{2\sqrt{y}}\Big|_{\substack{x=1\\y=4}} = -0{,}25.$$

Otrzymane rezultaty podstawiamy do wzoru (5.2) i otrzymujemy

$0{,}97^3 - \sqrt{4{,}08} \approx -1 + 3 \cdot (-0{,}03) - 0{,}25 \cdot 0{,}08 = -1{,}11.$

Wartość wyliczona za pomocą kalkulatora jest po zaokrągleniu równa –1,107.

Odpowiedź: Przybliżona wartość podanego wyrażenia jest równa –1,11.

b) Nasza funkcja to $z = \ln(x + \sqrt{y})$;

$P_1 = (0{,}02\,,0{,}91), \qquad P_0 = (0,1),$

$\Delta x = 0{,}02 - 0 = 0{,}02, \qquad \Delta y = 0{,}91 - 1 = -0{,}09;$

i jak w poprzednim zadaniu

$$z(0,1) = \ln 1 = 0, \quad z_x(0,1) = \frac{1}{x + \sqrt{y}}\Big|_{\substack{x=0\\y=1}} = 1, \quad z_y(0,1) = \frac{1}{x + \sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}\Big|_{\substack{x=0\\y=1}} = 0{,}5,$$

więc uwzględniając wzór (5.2), otrzymamy

$\ln\left(0{,}02 + \sqrt{0{,}91}\right) \approx 0 + 1 \cdot 0{,}02 + 0{,}5 \cdot (-0{,}09) = -0{,}025$.

Wartość wyliczona za pomocą kalkulatora jest po zaokrągleniu równa –0,026.

Odpowiedź: Przybliżona wartość jest równa –0,025.

c) Funkcję można zapisać następująco:

$$z = \sin(x - y^2), \quad P_1 = (4{,}11, 1{,}97), \quad P_0 = (4,2), \quad \Delta x = 0{,}11, \quad \Delta y = -0{,}03,$$

$$z(4,2) = \sin 0 = 0,$$

$$z_x(4,2) = \cos(x - y^2)\Big|_{(4,2)} = 1, \qquad z_y(4,2) = \cos(x - y^2)(-2y)\Big|_{(4,2)} = -4,$$

$$\sin(4{,}11 - 1{,}97^2) \approx 0 + 1 \cdot 0{,}11 - 4 \cdot (-0{,}03) = 0{,}23.$$

Wartość wyliczona za pomocą kalkulatora jest po zaokrągleniu równa 0,227.

Odpowiedź: Przybliżona wartość jest równa 0,23.

Zastosowanie różniczki zupełnej do szacowania błędu

Rozpatrzymy przypadek: dana jest funkcja wielu zmiennych, np. dwóch zmiennych $z = f(x, y)$. Chcemy wyliczyć jej wartość dla wielkości $x = x_0$, $y = y_0$, które są obarczone błędem odpowiednio Δx, Δy; wtedy wyliczona wartość z_0 będzie również obarczona błędem. My chcemy wyliczyć taką wielkość Δz, której nie przekroczy błąd wartości funkcji wyliczony z podstawienia błędnych danych. Wymieniona czynność nazywa się ***szacowaniem błędu***. W celu ***oszacowania błędu*** wykorzystamy różniczkę zupełną, w której do sumowania błędów będziemy używali bezwzględnych wartości ($\Delta x \geq 0 \ \wedge \ \Delta y \geq 0$), czyli

$$\Delta z = \left|z_x(P_0)\right|\Delta x + \left|z_y(P_0)\right|\Delta y . \tag{5.3}$$

Gdy wielkości x_0, y_0 odczytujemy jako wynik pomiaru, wówczas Δx czy Δy odczytujemy jako maksymalny błąd, nazywany błędem pomiaru. Błąd ten jest zawsze najmniejszą podziałką, np. liniału, gdy mierzymy długość (1 mm). Przy wyliczaniu szacowanego błędu otrzymany wynik zaokrąglamy zazwyczaj do jednego miejsca znaczącego.

Przykład *5.p.8*. Oszacować błąd, jeśli wynik odczytujemy ze wzoru $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ dla wyników $x = 3 \pm 0{,}1 \quad y = 4 \pm 0{,}05$.

W podanym przykładzie odczytujemy $\Delta x = 0{,}1, \quad \Delta y = 0{,}05.$

$$z_0 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \qquad z_x(3,4) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\Big|(3,4) = 0{,}6,$$

$$z_y(3,4) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\Big|(3,4) = 0{,}8\,.$$

Wyliczone wartości podstawiamy do (5.3) i otrzymujemy:

$$\Delta z = |0{,}6| \cdot 0{,}1 + |0{,}8| \cdot 0{,}05 = 0{,}06 + 0{,}04 = 0{,}1\,.$$

Wyliczyliśmy, że szacowany błąd wynosi 0,1, co oznacza, że otrzymany wynik możemy zapisać: $z_0 = 5 \pm 0{,}1$.

Oprócz szacowanego błędu wylicza się czasem błąd względny, który jest równy $\frac{\Delta z}{z_0}$ lub błąd procentowy $\frac{\Delta z}{z_0} \cdot 100\%$.

Odpowiedź: Błąd względny jest równy 0,02, a błąd procentowy 2%.

Przykład *5.p.9*. Funkcja zysku jest określona wzorem $z = x^2 + 2y^2$, gdzie *x*, *y* to kwoty zainwestowane w dwie różne inwestycje. Oszacować błąd otrzymany przy wyliczaniu zysku, gdy kwoty zainwestowane zaokrąglono do pełnych setek euro. x_0 = 1300 €, y_0 = 2000 €.

z(1300,2000) = 1 690 000 + 4 000 000 = 5 690 000, Δx = 100, Δy = 100; wyliczamy:

z_x (1300,2000) = 2*x*| (1300,2000) = 2600,

z_y (1300,2000) = 4*y*| (1300,2000) = 8000,

Δz = |2600| · 100 + |8000| · 100 = 106 000.

Gdy zaokrąglimy do jednego miejsca „znaczącego”, otrzymamy Δz = 100 000, wówczas wynik również musimy zaokrąglić do tego samego rzędu wielkości, czyli *z* = 5 700 000. Otrzymamy *z* = (5 700 000 ± 100 000) €. Oznacza to, że otrzymany wynik mieści się między kwotami 5 600 000 € a 5 800 000 €.

Przykład *5.p.10*. Wyliczamy przyspieszenie ziemskie za pomocą wahadła matematycznego i szacujemy błąd otrzymanego wyniku. Wykonaliśmy trzy pomiary – przy jednym, dziesięciu i stu wahnięciach dla wahadła o długości 0,850 m mierzonego miarą z dokładnością do milimetra. Otrzymaliśmy doświadczalnie następujące wyniki:

t = 1,9 s dla n = 1,

t = 18,4 s dla n = 10,

t = 184,8 s dla n = 100.

Rozwiązanie

Ze wzoru na obliczanie okresu wahadła

$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ wyliczamy $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$.

Okres $T = \frac{t}{n}$, gdzie t jest czasem n wahnięć.

Do wzoru, z którego wyliczamy g, podstawimy poprzednio zapisane T; wówczas otrzymamy ostateczny wzór, który pozwala wyliczyć przyspieszenie

$$g = \frac{4n^2\pi^2 l}{t^2}.$$

Dla wypisanej formuły wyliczymy teraz wzór, za pomocą którego oszacujemy błąd wyniku:

$$\Delta g = |g_l|\Delta l + |g_t|\Delta t = \left|\frac{4n^2\pi^2}{t^2}\right|\Delta l + \left|-\frac{8n^2\pi^2 l}{t^3}\right|\Delta t .$$

$\Delta l = 0{,}001$ m $\Delta t = 0{,}1$ s .

Wyliczamy teraz przyspieszenie ziemskie oraz oszacowanie otrzymanego wyniku dla:

n = 1, g = 9,296 m/s^2; Δg = 0,989, g = (9±1) m/s^2;

n = 10, g = 9,912 m/s^2; Δg = 0,119 m/s^2, g = (9,9 ± 0,1) m/s^2;

n = 100, g = 9,826 m/s^2; Δg = 0,022 m/s^2, g = (9,83 ± 0,02) m/s^2.

Uwaga *5.u.8.* Wyliczone błędy zaokrągla się zazwyczaj do jednego miejsca znaczącego, co w naszym przypadku zrobiliśmy. Wynik również zaokrąglamy do odpowiednich zaokrągleń błędu.

Na podstawie otrzymanych wyników łatwo zauważyć, że wraz z dokładniejszym wyliczeniem okresu (zwiększanie wartości n) zwiększa się dokładność i zmniejsza się błąd. Informujemy, że dla Poznania, gdzie dokonano doświadczenia, przyspieszenie ziemskie odczytane z tablic wynosi 9,8126 m/s^2.

Zastosowanie różniczki zupełnej do wyliczania kolejnych przybliżeń rozwiązania układu równań

Niech będzie dany układ równań

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases} \tag{5.4}$$

oraz liczby x_0 i y_0, które są zerowymi rozwiązaniami układu równań (5.4). Parę liczb x_0 , y_0 nazywamy zerowym rozwiązaniem układu (5.4), gdy podstawione do lewych stron tego układu dają wyniki zbliżone do zer (prawe strony równań). Aby uzyskać pierwsze przybliżenie, czyli

$$x_1 = x_0 + \Delta x \qquad y_1 = y_0 + \Delta y, \tag{5.5}$$

rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} f_x(x_0,y_0)\cdot\Delta x + f_y(x_0,y_0)\cdot\Delta y = -f(x_0,y_0) \\ g_x(x_0,y_0)\cdot\Delta x + g_y(x_0,y_0)\cdot\Delta y = -g(x_0,y_0) \end{cases}, \tag{5.6}$$

z którego wyliczamy Δx i Δy ; następnie podstawiamy je do (5.5). Układ (5.6) wynika stąd, że chcemy wyliczyć taki punkt

$P_1 = (x_1, y_1)$, dla którego $\begin{cases} f(P_1)=0 \\ g(P_1)=0 \end{cases}$,

a $f(P_1)$ i $g(P_1)$ przybliżamy według wzoru (5.2). Pierwsze przybliżenie lepiej przybliża rzeczywiste rozwiązanie układu (5.4). Jeśli rozwiązanie uzyskane jako pierwsze przybliżenie jest mało dokładne, to stosujemy ponownie wzory (5.6) i (5.5), aby uzyskać drugie przybliżenie, a przybliżenie pierwsze traktujemy jako zerowe. Czynność tę można powtarzać tak długo, aż uzyskamy rozwiązanie wystarczająco dokładne.

Przykład *5.p.11*. Wyliczyć drugie przybliżenie dla następujących układów równań, gdy dane są zerowe przybliżenia

a) $\begin{cases} 3x^3+4y^2=6 \\ 2x^2-5y^3=-4 \end{cases}, \quad \begin{matrix} x_0=1 \\ y_0=1 \end{matrix}$; b) $\begin{cases} 4\ln x + y^2 = 5 \\ 2\sqrt{x}-2y^3=-15 \end{cases}, \quad \begin{matrix} x_0=1 \\ y_0=2 \end{matrix}$.

Uwaga *5.u.9*. Obliczenia zazwyczaj muszą być wykonywane z pewnym przybliżeniem. W niniejszej książce autorzy przyjęli dokładność do czterech miejsc po przecinku. Kierując się głównie względami przejrzystości zapisu, zrezygnowano z używania znaku przybliżenia „ ≈ ”, zastępując go zwykłym znakiem równości.

Rozwiązania

a) Najpierw równania zapisujemy jako funkcje dwóch zmiennych (5.4):

$$\begin{cases} f(x,y) = 3x^3 + 4y^2 - 6 \\ g(x,y) = 2x^2 - 5y^3 + 4 \end{cases},$$

układ równań ma więc postać:

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}, \text{ czyli}$$

$$\begin{cases} 3x^3 + 4y^2 - 6 = 0 \\ 2x^2 - 5y^3 + 4 = 0 \end{cases}.$$

Dla wypisanych funkcji tworzymy układ równań (5.6), więc musimy najpierw wyliczyć ich składniki.

$$f_x(x,y) = 9x^2,\ f_x(1,1) = 9,\quad f_y(x,y) = 8y,\quad f_y(1,1) = 8,\quad f(1,1) = 1;$$

$$g_x(x,y) = 4x,\quad g_x(1,1) = 4,\quad g_y(x,y) = -15y^2,\ g_y(1,1) = -15,\quad g(1,1) = 1.$$

Zapisujemy układ (5.6):

$$\begin{cases} 9 \cdot \Delta x + 8 \cdot \Delta y = -1 \\ 4 \cdot \Delta x - 15 \cdot \Delta y = -1 \end{cases}$$

i wyliczamy $\Delta x \ i \ \Delta y$:

$$\begin{cases} \Delta x = -\dfrac{23}{167} = -0{,}1377 \\ \Delta y = \dfrac{5}{167} = 0{,}0299 \end{cases}.$$

Wyliczone wartości podstawiamy do (5.5):

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 0{,}1377 = 0{,}8623 \\ y_1 = 1 + 0{,}0299 = 1{,}0299 \end{cases}.$$

Jest to pierwsze przybliżenie danego układu równań. Zatem $P_1 = (0{,}8623,\ 1{,}0299)$. Podstawiamy liczby x_1 i y_1 w miejsce zmiennych *x* i *y* we wzorach funkcji *f* i *g*. Otrzymujemy: $f(P_1) = f(x_1, y_1) = 0{,}1663,\quad g(P_1) = g(x_1, y_1) = 0{,}0251.$

Liczymy teraz drugie przybliżenie, analogicznie jak pierwsze, traktując (x_1, y_1) jako zerowe przybliżenie

$f_x(P_1) = 9x_1^2 = 6{,}6921$, $f_y(P_1) = 8y_1 = 8{,}2392$, $f(P_1) = 0{,}1663$,

$g_x(P_1) = 4x_1 = 3{,}4492$, $g_y(P_1) = -15y_1^2 = -15{,}9104$, $g(P_1) = 0{,}0251$.

Po wpisaniu otrzymanych wyników do (5.6) otrzymamy:

$$\begin{cases} 6{,}6921 \cdot \Delta x + 8{,}2392 \cdot \Delta y = -0{,}1663 \\ 3{,}4492 \cdot \Delta x - 15{,}9104 \cdot \Delta y = -0{,}0251 \end{cases},$$

$$\begin{cases} \Delta x = -0{,}0211 \\ \Delta y = -0{,}0030 \end{cases}.$$

Po podstawieniu do (5.5) otrzymamy równania:

$$\begin{cases} x_2 = 0{,}8623 - 0{,}0211 = 0{,}8412 \\ y_2 = 1{,}0299 - 0{,}0030 = 1{,}0269 \end{cases},$$

które tworzą drugie przybliżenie danego układu równań. Zatem $P_2 = (0{,}8412; 1{,}0269)$. Podstawiamy liczby x_2 i y_2 w miejsce zmiennych *x* i *y* we wzorach funkcji *f* i *g*. Otrzymujemy: $f(P_2) = f(x_2, y_2) = 0{,}0038$, $g(P_2) = g(x_2, y_2) = 0{,}0008$.

Uwaga *5.u.10*. Rozwiązywaliśmy układ równań

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases};$$

„zerowym" przybliżeniem było:

$$\begin{cases} f(1{,}1) = 1 \\ g(1{,}1) = 1 \end{cases},$$

pierwszym przybliżeniem:

$$\begin{cases} f(P_1) = 0{,}1663 \\ g(P_1) = 0{,}0251 \end{cases},$$

a drugim przybliżeniem:

$$\begin{cases} f(P_2) = 0{,}0038 \\ g(P_2) = 0{,}0008 \end{cases}.$$

Widać, że prawe strony układów równań dla kolejnych przybliżeń bardzo szybko dążą do 0, stąd wniosek, że kolejne przybliżenia zmiennych *x* i *y* są coraz bliższe rozwiązaniom dokładnym. Oczywiście proces przybliżonego rozwiązywania układu równań nie musi kończyć się na drugim przybliżeniu. Można dokonywać trzeciego i dalszych przybliżeń. Zadanie kończymy, gdy poziom dokładności

(prawe strony układu $\begin{cases} f(P_i)=... \\ g(P_i)=... \end{cases}$)

osiągnie żądaną (przez wyliczającego) wielkość.

Odpowiedź: Drugie przybliżenie danego układu równań jest następujące: $x = 0{,}8412$, $y = 1{,}0269$.

b) Podobnie jak w zadaniu poprzednim, najpierw dany układ równań zapisujemy za pomocą funkcji w postaci (5.5)

$$\begin{cases} f(x,y) = 4\ln x + y^2 - 5 \\ g(x,y) = 2\sqrt{x} - 2y^3 + 15 \end{cases}, \quad \text{gdzie } x_0 = 1, \quad y_0 = 2, \quad P_0 = (1,2).$$

Wyliczamy odpowiednio:

$$f(P_0) = -1, \quad g(P_0) = 1,$$

$$f_x = \frac{4}{x}, \quad f_y = 2y, \quad f_x(P_0) = 4, \quad g_x(P_0) = 1,$$

$$g_x = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad g_y = -6y^2, \quad f_y(P_0) = 4, \quad g_y(P_0) = -24$$

i podstawiamy do (5.6); otrzymujemy:

$$\begin{cases} 4\cdot\Delta x + 4\cdot\Delta y = 1 \\ \Delta x - 24\cdot\Delta y = -1 \end{cases},$$

a po rozwiązaniu $\Delta x = 0{,}2, \quad \Delta y = 0{,}05$, więc po podstawieniu do (5.5) mamy pierwsze przybliżenie: $x_1 = 1{,}20 \quad y_1 = 2{,}05$. Liczymy teraz drugie przybliżenie:

$$f(P_1) = -0{,}0682, \quad f_x(P_1) = 3{,}3333, \quad f_y(P_1) = 4{,}1,$$

$$g(P_1) = -0{,}0394, \quad g_x(P_1) = 0{,}9129, \quad g_y(P_1) = -25{,}215$$

i dalej:

$$\begin{cases} 3{,}3333\cdot\Delta x + 4{,}1\cdot\Delta y = 0{,}0682 \\ 0{,}9129\cdot\Delta x - 25{,}215\cdot\Delta y = 0{,}0394 \end{cases}, \quad \begin{matrix} \Delta x = 0{,}0214 \\ \Delta y = -0{,}0008 \end{matrix};$$

$x_2 = 1{,}200 + 0{,}0214 = 1{,}2214$,

$y_2 = 2{,}050 - 0{,}0008 = 2{,}0492$.

W celu sprawdzenia dokładności przybliżenia wyliczamy:

$f(x_2, y_2) = -0{,}0008$; $g(x_2, y_2) = 0{,}0003$.

Odpowiedź: Drugie przybliżenie: $x_2 = 1{,}2214$, $y_2 = 2{,}0492$.

Zadania

Zadanie *5.z.3*. Znaleźć drugie przybliżenie dla danych układów równań i zadanych zerowych przybliżeń.

a) $\begin{cases} 3x^2 + 4y^3 - 2x = 11 \\ 2x^3 - 3y^2 + 2y = 18 \end{cases}, \quad \begin{matrix} x_0 = 2 \\ y_0 = 1 \end{matrix}$; b) $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^3 = 5 \\ 3x + 5xy + 6y^2 = 3 \end{cases}, \quad \begin{matrix} x_0 = 1 \\ y_0 = -1 \end{matrix}$.

Odpowiedzi: a) $x_2 = 2{,}018$, $y_2 = 0{,}915$; b) $x_2 = 1{,}176$, $y_2 = -0{,}881$.

Przykład *5.p.12*. Znaleźć pierwsze przybliżenie dla danych układów równań i zadanych zerowych przybliżeń

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 + 2y^3 + 2}{1 - 2x + y^2} = -\dfrac{7}{2} \\ 2\cdot\sqrt{x^2 - 3} + 3y^4 = 4 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 1 \end{cases}, \text{ zatem } P_0 = (2,1).$$

Przyjmiemy definicje dwóch funkcji dwóch zmiennych

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^2 + 2y^3 + 2}{1 - 2x + y^2} + \dfrac{7}{2} \\ g(x,y) = 2\cdot\sqrt{x^2 - 3} + 3y^4 - 4 \end{cases};$$

wówczas układ równań będzie miał postać:

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}.$$

Wyliczmy wartość funkcji f i g w punkcie P_0.

$$f(P_0)=\frac{8}{1-4+1}+\frac{7}{2}=-0{,}5\,,$$

$$g(P_0)=2\cdot\sqrt{4-3}+3-4=1\,,$$

a następnie pochodne cząstkowe

$$f_x(x,y)=\frac{2x\cdot\left(1-2x+y^2\right)+2\cdot\left(x^2+2y^3+2\right)}{\left(1-2x+y^2\right)^2},$$

$$f_y(x,y)=\frac{6y^2\cdot\left(1-2x+y^2\right)-2y\cdot\left(x^2+2y^3+2\right)}{\left(1-2x+y^2\right)^2},$$

$$g_x(x,y)=\frac{2x}{\sqrt{x^2-3}},$$

$$g_y(x,y)=12y^3\,.$$

Pochodne cząstkowe w punkcie P_0 mają następujące wartości:

$$f_x(P_0)=\frac{4\cdot(-2)+2\cdot 8}{4}=2\,,\qquad f_y(P_0)=\frac{6\cdot(-2)-2\cdot 8}{4}=-7\,,$$

$$g_x(P_0)=\frac{4}{1}=4\,,\qquad g_y(P_0)=12\,.$$

Rozwiążemy zatem układ równań liniowych

$$\begin{cases}2\cdot\Delta x-7\cdot\Delta y=0{,}5\\ 4\cdot\Delta x+12\cdot\Delta y=-1\end{cases}.$$

Rozwiązaniami są liczby:

$$\begin{cases}\Delta x=-\dfrac{1}{52}\\ \Delta y=-\dfrac{4}{52}=-\dfrac{1}{13}\end{cases},$$

a po przybliżeniu z dokładnością do czterech miejsc po przecinku

$$\begin{cases}\Delta x=-0{,}0192\\ \Delta y=-0{,}0769\end{cases}.$$

Pierwszym przybliżeniem rozwiązania układu równań nieliniowych jest więc

$$\begin{cases} x_1 = 1{,}9801 \\ x_2 = 0{,}9231 \end{cases},$$

czyli $P_1 = (1{,}9801,\ 0{,}9231)$, a funkcje f i g osiągają w tym punkcie wartości

$$f(P_1) = -0{,}0549, \qquad g(P_1) = 0{,}0975.$$

Odpowiedź: Pierwszym przybliżeniem powyższego układu równań jest: $x_1 = 1{,}9801$, $y_1 = 0{,}9231$.

Zadania

Zadanie *5.z.4*. Wyliczyć pierwsze przybliżenie dla danych układów równań i zadanych zerowych przybliżeń.

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{y^2+2} - \dfrac{3y}{x^2+3} = -1 \\ 2\ln x + 3\sqrt{y+2} = 5 \end{cases}$, $\quad \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 2 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 3e^x + 4\sqrt{y} = 10 \\ 4\sqrt{x+1} - \dfrac{4}{y} = 3 \end{cases}$, $\quad \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 4 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 2x^2 + 4y^3 = 13 \\ x^3 - 3y^2 = 4 \end{cases}$, $\quad \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 1 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 3x^3 - 4y^2 = 0 \\ 4x^2 + 5y^3 = -1 \end{cases}$, $\quad \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = -1 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} 2x^3 + 3y^2 = 13 \\ 3x^2 - 2y^3 = -12 \end{cases}$, $\quad \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 2 \end{cases}$;

f) $\begin{cases} 4x^3 - 5y^2 = 28 \\ 3x^2 - 2y^3 = 13 \end{cases}$, $\quad \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = -1 \end{cases}$;

g) $\begin{cases} 3x^3 - 4y^2 = -18 \\ 2x^2 + 3y^3 = 27 \end{cases}$, $\begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 2 \end{cases}$;

h) $\begin{cases} \ln(x^2 - 3) + 2y^2 = 1 \\ 3x^2 - \ln(2y + 3) = 25 \end{cases}$, $\begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = -1 \end{cases}$;

i) $\begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2} = \dfrac{1}{2} \\ 8\sqrt{x+2} - 9\ln y = 15 \end{cases}$, $\begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 1 \end{cases}$.

Odpowiedzi

a) $x_1 = 0{,}7464$, $y_1 = 1{,}3429$;

b) $x_1 = 1{,}9801$, $y_1 = 0{,}9231$;

c) $\begin{matrix} x_1 = 1{,}969 \\ y_1 = 1{,}104 \end{matrix}$, $\begin{matrix} f(P_1) = 0{,}136 \\ g(P_1) = -0{,}023 \end{matrix}$;

d) $\begin{matrix} x_1 = 1{,}211 \\ y_1 = -1{,}113 \end{matrix}$, $\begin{matrix} f(P_1) = 0{,}373 \\ g(P_1) = -0{,}028 \end{matrix}$;

e) $\begin{matrix} x_1 = 0{,}944 \\ y_1 = 1{,}944 \end{matrix}$, $\begin{matrix} f(P_1) = 0{,}020 \\ g(P_1) = -0{,}020 \end{matrix}$;

f) $\begin{matrix} x_1 = 1{,}990 \\ y_1 = -0{,}853 \end{matrix}$, $\begin{matrix} f(P_1) = 0{,}116 \\ g(P_1) = -0{,}122 \end{matrix}$;

g) $\begin{matrix} x_1 = -0{,}800 \\ y_1 = 2{,}050 \end{matrix}$, $\begin{matrix} f(P_1) = -0{,}346 \\ g(P_1) = -0{,}125 \end{matrix}$;

h) $\begin{matrix} x_1 = 2{,}044 \\ y_1 = -0{,}706 \end{matrix}$, $\begin{matrix} f(P_1) = 0{,}161 \\ g(P_1) = -0{,}157 \end{matrix}$.

Przykład, który zostanie teraz przytoczony, powinien przekonać Czytelnika o skuteczności metody przybliżonego rozwiązywania układu równań nieliniowych. Autorzy znają bowiem dokładne rozwiązanie poniższego układu równań – są to

liczby: $x = 1$, $y = 2$. Jednak jako rozwiązanie „zerowe” przyjęty zostanie inny punkt. Obliczenia będą prowadzone z dokładnością do czwartego miejsca po przecinku. Czytelnik przekona się, że mimo bardzo „grubych” błędów w pierwszym oszacowaniu, w kolejnych przybliżeniach odpowiednie układy równań liniowych „stabilizują się” i dość szybko doprowadzają do rozwiązania dokładnego.

Przykład *5.p.13.* Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} 2x^2 - 5xy + 3y^3 = 16 \\ x^3 + 3xy - 4y^2 = -9 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 3 \end{cases}, \qquad P_0 = (0,3).$$

Definiujemy funkcje dwóch zmiennych:

$$\begin{cases} f(x,y) = 2x^2 - 5xy + 3y^3 - 16 \\ g(x,y) = x^3 + 3xy - 4y^2 + 9 \end{cases};$$

wówczas układ równań przybierze postać:

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases},$$

a po podstawieniu w miejsce zmiennych x i y liczb x_0 i y_0 otrzymujemy:

$$\begin{cases} f(P_0) = 65 \\ g(P_0) = -27 \end{cases}.$$

Obliczymy pochodne cząstkowe obu funkcji

$$f_x(x,y) = 4x - 5y, \qquad f_y(x,y) = -5x + 9y^2,$$

$$g_x(x,y) = 3x^2 + 3y, \qquad g_y(x,y) = 3x - 8y$$

oraz ich wartości w punkcie P_0:

$$f_x(P_0) = -15, \qquad f_y(P_0) = 81,$$

$$g_x(P_0) = 9, \qquad g_y(P_0) = -24.$$

Odpowiedni układ równań liniowych ma postać:

$$\begin{cases} -15 \cdot \Delta x + 81 \cdot \Delta y = -65 \\ 9 \cdot \Delta x - 24 \cdot \Delta y = 27 \end{cases},$$

a jego rozwiązaniem jest

$$\begin{cases}\Delta x = 1{,}6992 \\ \Delta y = -0{,}4878\end{cases}, \text{ zatem } \begin{cases}x_1 = x_0 + \Delta x \\ y_1 = y_0 + \Delta y\end{cases}, \text{ czyli } \begin{cases}x_1 = 1{,}6992 \\ y_1 = 2{,}5122\end{cases}.$$

Pierwszym przybliżeniem jest $P_1 = (1{,}6992;\ 2{,}5122)$. Po obliczeniu wartości funkcji oraz pochodnych cząstkowych w punkcie P_1 mamy:

$$f(P_1) = 15{,}9955, \quad f_x(P_1) = -5{,}7642, \quad f_y(P_1) = 48{,}3043,$$

$$g(P_1) = 1{,}5677, \quad g_x(P_1) = 16{,}1984, \quad g_y(P_1) = -15{,}0000,$$

zatem układ równań liniowych ma postać:

$$\begin{cases}-5{,}7642 \cdot \Delta x + 48{,}3043 \cdot \Delta y = -15{,}9955 \\ 16{,}1984 \cdot \Delta x - 15{,}0000 \cdot \Delta y = -1{,}4677\end{cases}.$$

Jego rozwiązaniem jest:

$$\begin{cases}\Delta x = -0{,}4466 \\ \Delta y = -0{,}3844\end{cases}, \text{ zatem } \begin{cases}x_2 = x_1 + \Delta x \\ y_2 = y_1 + \Delta y\end{cases}, \text{ czyli } \begin{cases}x_2 = 1{,}2526 \\ y_2 = 2{,}1278\end{cases}.$$

Drugim przybliżeniem jest $P_2 = (1{,}2526;\ 2{,}1278)$. Po obliczeniu wartości funkcji oraz pochodnych cząstkowych w punkcie P_2 mamy:

$$f(P_2) = 2{,}7127, \quad f_x(P_2) = -5{,}6286, \quad f_y(P_2) = 34{,}4848,$$

$$g(P_2) = 0{,}8511, \quad g_x(P_2) = 11{,}0904, \quad g_y(P_2) = -13{,}2646,$$

zatem układ równań liniowych ma postać:

$$\begin{cases}-5{,}6286 \cdot \Delta x + 34{,}4848 \cdot \Delta y = -2{,}7127 \\ 11{,}0904 \cdot \Delta x - 13{,}2646 \cdot \Delta y = -0{,}8511\end{cases}.$$

Jego rozwiązaniem jest:

$$\begin{cases}\Delta x = -0{,}2123\\ \Delta y = -0{,}1133\end{cases}, \text{ zatem } \begin{cases}x_3 = x_2 + \Delta x\\ y_3 = y_2 + \Delta y\end{cases}, \text{ czyli } \begin{cases}x_3 = 1{,}0403\\ y_3 = 2{,}0145\end{cases}.$$

Trzecim przybliżeniem jest $P_3 = (1{,}0403;\ 2{,}0145)$.

Jeśli uważny Czytelnik sprawdza obliczenia z kalkulatorem w ręku, to autorzy szczerze doradzają wyjście w tej chwili na spacer (kwadrans powinien wystarczyć) i kontynuowanie obliczeń po powrocie.

Po obliczeniu wartości funkcji oraz pochodnych cząstkowych w punkcie P_3 mamy:

$$f(P_3) = 0{,}2118,\quad f_x(P_3) = -5{,}9113,\quad f_y(P_3) = 31{,}3224,$$

$$g(P_3) = 0{,}1800,\quad g_x(P_3) = 9{,}2902,\quad g_y(P_3) = -12{,}9951,$$

zatem układ równań liniowych ma postać:

$$\begin{cases}-5{,}9113\cdot\Delta x + 31{,}3224\cdot\Delta y = -0{,}2118\\ 9{,}2902\cdot\Delta x - 12{,}9951\cdot\Delta y = -0{,}1800\end{cases}.$$

Jego rozwiązaniem jest:

$$\begin{cases}\Delta x = -0{,}0392\\ \Delta y = -0{,}0142\end{cases}, \text{ zatem } \begin{cases}x_4 = x_3 + \Delta x\\ y_4 = y_3 + \Delta y\end{cases}, \text{ czyli } \begin{cases}x_4 = 1{,}0011\\ y_3 = 2{,}0003\end{cases}.$$

Czwartym przybliżeniem jest $P_4 = (1{,}0011;\ 2{,}0003)$.

I jeszcze raz tak samo...

Po obliczeniu wartości funkcji oraz pochodnych cząstkowych w punkcie P_4 mamy:

$$f(P_4) = 0{,}0027,\quad f_x(P_4) = -5{,}9971,\quad f_y(P_4) = 31{,}0053,$$

$$g(P_4) = 0{,}0060,\quad g_x(P_4) = 9{,}0075,\quad g_y(P_4) = -12{,}9991,$$

zatem układ równań liniowych ma postać:

$$\begin{cases}-5{,}9971\cdot\Delta x + 31{,}0053\cdot\Delta y = -0{,}0027\\ 9{,}0075\cdot\Delta x - 12{,}9991\cdot\Delta y = -0{,}0060\end{cases}.$$

Jego rozwiązaniem jest:

$$\begin{cases}\Delta x = -0{,}0011\\ \Delta y = -0{,}0003\end{cases},\ \text{zatem}\ \begin{cases}x_5 = x_4 + \Delta x\\ y_5 = y_4 + \Delta y\end{cases}\ \text{czyli}\ \begin{cases}x_5 = 1\\ y_5 = 2\end{cases}.$$

Piątym przybliżeniem jest $P_5 = (1;\ 2)$. Po obliczeniu wartości funkcji w punkcie P_5 otrzymujemy $f(P_5) = 0,\quad g(P_5) = 0$, zatem punkt P_5 jest *dokładnym* rozwiązaniem układu równań nieliniowych.

Istnieje problem podstawowy – jak wyznaczyć „zerowe" przybliżenie, czyli punkt, od którego rozpoczynamy obliczenia. W powyższych zadaniach punkt ten był po prostu dany. Jeśli Czytelnikowi zdarzy się rozwiązywać podobne zagadnienie w praktyce, to punkt P_0 będzie musiał określić sam. Skąd ma zatem wiedzieć, od czego zacząć? Najprostszym wyjściem jest sporządzenie (np. za pomocą komputerowych programów matematycznych) wykresów obu funkcji i znalezienie punktów ich przecięcia, a następnie odczytanie ich przybliżonych współrzędnych. Jednak ten sposób często bywa niedostępny. Pozostaje odwołanie się do praktyki. Najczęściej układ równań opisuje pewien proces (np. ekonomiczny), o którym mamy pewną (wynikającą z intuicji albo doświadczenia) wiedzę. Tak więc spodziewamy się pewnych wyników tego procesu. Te – spodziewane – wyniki powinny być wystarczająco dokładne, aby na ich podstawie wyznaczyć rozwiązanie problemu z *żądaną* dokładnością. Należy jednocześnie wspomnieć, że jeśli punkt P_0 obierzemy daleko od rzeczywistego rozwiązania, to kolejne obliczenia mogą nas od rozwiązania oddalić.

5.8. Ekstremum funkcji dwóch zmiennych

Definicja *5.d.15.* Mówimy, że funkcja $z = f(x, y)$ ma w punkcie $P_0 = (x_0, y_0)$ maksimum lokalne, jeżeli istnieje takie otoczenie punktu P_0 U_{P_0}, że dla każdego $P \in U_{P_0}$ zachodzi nierówność $f(P) < f(P_0)$.

Definicja *5.d.16.* Mówimy, że funkcja $z = f(x, y)$ ma w punkcie P_0 minimum lokalne, jeżeli istnieje takie otoczenie tego punktu U_{P_0}, że dla każdego punktu P z tego otoczenia zachodzi nierówność $f(P) > f(P_0)$.

Definicja *5.d.17.* Mówimy, że funkcja $z = f(x, y)$ ma w punkcie P_0 ekstremum lokalne, gdy ma w punkcie tym minimum lub maksimum lokalne.

Warunek konieczny istnienia ekstremum. Jeżeli funkcja $z = f(x, y)$ ma pochodną w pewnym otoczeniu punktu P_0, to warunkiem koniecznym istnienia ekstremum w punkcie P_0 jest

$$f_x(P_0) = 0,$$
$$f_y(P_0) = 0.$$

Punkt P_0, którego współrzędne spełniają oba powyższe równania, nazywamy ***punktem stacjonarnym***.

Warunek wystarczający istnienia ekstremum. Jeżeli funkcja $z = f(x,y)$ ma drugie pochodne cząstkowe w pewnym otoczeniu punktu P_0 oraz w punkcie tym zachodzi warunek konieczny istnienia ekstremum, to warunkiem wystarczającym istnienia ekstremum w punkcie P_0 jest

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(P_0) & f_{xy}(P_0) \\ f_{xy}(P_0) & f_{yy}(P_0) \end{vmatrix} > 0 ;$$

gdy $f_{xx}(P_0) < 0$, wówczas w punkcie P_0 istnieje maksimum lokalne,
gdy $f_{xx}(P_0) > 0$, wówczas w punkcie P_0 istnieje minimum lokalne.

Uwaga *5.u.11.* Jeśli wyznacznik podany w warunku wystarczającym jest mniejszy od zera, to dana funkcja w punkcie P_0 nie ma ekstremum, natomiast gdy podany wyznacznik w podanym punkcie jest równy zeru, wówczas w punkcie tym może, a nie musi być ekstremum.

Uwaga *5.u.12.* Wartość funkcji w punkcie, w którym zachodzi ekstremum, nazywamy wartością ekstremalną, a więc maksymalną lub minimalną.

Przykład *5.p.14.* Znaleźć wartości ekstremalne dla następujących funkcji:

a) $z = x^2 + 2y^2 + xy - 5x - 6y + 7$;

b) $z = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}y^2 + xy - 7x - y + 3$;

c) $z = (x + y)\, e^{-x^2 - y^2}$;

d) $L = \sqrt{1 - t^2 - u^2}$.

Schemat rozwiązywania

(1) określenie dziedziny funkcji (obszaru określoności),
(2) wyliczenie pochodnych cząstkowych,

(3) wykorzystanie warunku koniecznego – utworzenie układu równań i rozwiązanie go (ustalenie punktów stacjonarnych),
(4) warunek wystarczający – sprawdzenie znaku wyznacznika dla punktów stacjonarnych (określenie rodzaju ekstremum),
(5) wyliczenie wartości ekstremalnych.

Rozwiązania

a) $z = x^2 + 2y^2 + xy - 5x - 6y + 7$.

Ad. (1) Dziedzina: $R \times R$.
Ad. (2)
Pochodne cząstkowe pierwszego rzędu:

$z_x = 2x + y - 5,\ z_y = 4y + x - 6$;

Pochodne cząstkowe drugiego rzędu:

$z_{xx} = 2, \quad z_{xy} = 1, \quad z_{yx} = 1, \quad z_{yy} = 4.$

Ad. (3) $\begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ 4y + x - 6 = 0 \end{cases}$, $x_0 = 2,\ y_0 = 1$; punkt stacjonarny ma współrzędne $P_0 = (2,1)$.

Ad. (4) Pochodne cząstkowe w punkcie stacjonarnym są wyliczonymi wcześniej liczbami (pochodne cząstkowe drugiego rzędu są funkcjami stałymi), więc

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 1 \rangle 0$, a $z_{xx} \rangle 0$,

czyli dana funkcja ma minimum lokalne.

Ad. (5) $z(2,1)_{\min} = 2^2 + 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 5 \cdot 2 - 6 \cdot 1 + 7 = 3.$

Odpowiedź: Funkcja osiąga wartość minimalną równą 3.

b) $z = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}y^2 + xy = 7x - y + 3$.

Ad. (1) Dziedzina: $R \times R$.

Ad. (2) $z_x = x^2 + y - 7, \qquad z_y = y + x - 1.$

Ad. (3) $\begin{cases} x^2 + y - 7 = 0 \\ y + x - 1 = 0 \end{cases}$,

z drugiego równania wyliczamy y i podstawiamy do pierwszego; wówczas otrzymamy $x_1 = -2,\ x_2 = 3,$ a następnie wyliczamy $y_1 = 3, y_2 = -2,$ co w efekcie daje dwa punkty stacjonarne: $P_1 = (-2,3),\ P_2 = (3,-2).$

Ad. (4) Warunek wystarczający: $z_{xx} = 2x,\ z_{xy} = 1,\ z_{yy} = 1.$

Dla punktu P_1: $z_{xx} = -4,\ z_{xy} = 1,\ z_{yy} = 1$

$\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \langle 0$ (brak ekstremum).

Dla punktu P_2: $z_{xx} = 6 \rangle 0,\ z_{xy} = 1,\ z_{yy} = 1$

$\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \rangle 0$ zachodzi przypadek minimum.

Ad. (5) ***Odpowiedź***: Wartość minimalna $z(3,-2)_{\min} = -11.$

c) $z = (x+y)e^{-x^2-y^2}$.

Ad. (1) Dziedzina: $R \times R$.

Ad. (2) $z_x = [1-2x(x+y)]e^{-x^2-y^2}$, $z_y = [1-2y(x+y)]e^{-x^2-y^2}$.

Ad. (3) Ze względu na to, że $e^{-x^2-y^2}$ jest zawsze dodatnie, otrzymamy układ równań:

$$\begin{cases} 1-2x(x+y) = 0 \mid \cdot\, y \\ 1-2y(x+y) = 0 \mid \cdot\, (-x) \end{cases};$$

gdy dodamy je stronami, wówczas otrzymamy w efekcie $y = x$, co po podstawieniu do pierwszego równania i rozwiązaniu daje wyniki:

$x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{2}$ i odpowiednio wyliczone $y_1 = -\frac{1}{2}, \quad y_2 = \frac{1}{2}.$

Mamy więc dwa punkty stacjonarne:

$$A = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \text{ oraz } B = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right).$$

Ad. (4)

$z_{xx} = \{-4x - 2y - 2x[1-2x(x+y)]\}e^{-x^2-y^2}$,

$$z_{xy} = \{-2x - 2y[1 - 2x(x+y)]\}e^{-x^2-y^2},$$

$$z_{yy} = \{-2x - 4y - 2y[1 - 2y(x+y)]\}e^{-x^2-y^2}.$$

Dla punktu *A* otrzymamy

$$\begin{vmatrix} 3e^{-1/2} & e^{-1/2} \\ e^{-1/2} & 3e^{-1/2} \end{vmatrix} \rangle 0 \text{ oraz } z_{xx|A} \rangle 0,$$

więc zachodzi przypadek minimum.

Dla punktu *B* otrzymamy

$$\begin{vmatrix} -3e^{-1/2} & -e^{-1/2} \\ -e^{-1/2} & -3e^{-1/2} \end{vmatrix} \rangle 0 \text{ oraz } z_{xx|B} \langle 0,$$

więc zachodzi przypadek maksimum.

Ad. (5) ***Odpowiedź***: $z(A)_{\min} = -e^{-1/2}$, $z(B)_{\max} = e^{-1/2}$.

d) $L = \sqrt{1 - t^2 - u^2}$.

Ad. (1) Dziedzina funkcji: $1 - t^2 - u^2 \geq 0$.

Ad. (2) $L_t = \dfrac{-t}{\sqrt{1-t^2-u^2}}$, $L_u = \dfrac{-u}{\sqrt{1-t^2-u^2}}$, $1 - t^2 - u^2 \neq 0$.

Ad. (3) Ułamek jest równy zero, gdy jego licznik jest równy zero, więc z warunku koniecznego otrzymamy układ równań

$\begin{cases} -t = 0 \\ -u = 0 \end{cases}$, a zatem punktem stacjonarnym jest $P_0 = (0,0)$.

Ad. (4)

$$L_{tt|P_0} = \frac{-1 \cdot \sqrt{1-t^2-u^2} + t \cdot \dfrac{-t}{\sqrt{1-t^2-u^2}}}{1-t^2-u^2}\Big|_{P_0} = -1,$$

$$L_{tu|P_0} = \frac{t \cdot \dfrac{-u}{\sqrt{1-t^2-u^2}}}{1-t^2-u^2}\Big|_{P_0} = 0,$$

$$L_{uu|P_0} = \frac{-1 \cdot \sqrt{1-t^2-u^2} + u \cdot \dfrac{-u}{\sqrt{1-t^2-u^2}}}{1-t^2-u^2}\Big|_{P_0} = -1,$$

$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \rangle\ 0$ i $L_{tt|P_0} < 0$ (funkcja osiąga maksimum lokalne).

Ad. (5) ***Odpowiedź***: $L(P_0)_{\max} = \sqrt{1-0^2-0^2} = 1$.

Przykład *5.p.15*. Niech *x, y* oznaczają kwoty zainwestowane, odpowiednio, w dwa przedsięwzięcia, a *Z* – zysk otrzymany z tych kwot. Oznaczmy:

$$z = \frac{Z}{x+y},$$

gdzie *z* – zysk względny ($z \cdot 100\%$ – zysk względny procentowy), który wyraża się wzorem: $z = (x+2y-2)e^{-x^2-\frac{1}{2}y^2}$. Wyliczyć maksimum funkcji zysku względnego.

Rozwiązanie

Ad. (1) Dziedzina funkcji: $R \times R$. Jest to dziedzina, która wyraża się podanym wyżej wzorem. Jednak zmienne *x* i *y* oznaczają zainwestowane kwoty, które nie mogą być ujemne, zatem: $x \geq 0$ oraz $y \geq 0$.

Ad. (2) Wyliczamy obie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu:

$$z_x = \left[1 - x \cdot (x+2y-2)\right] \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2-y^2},$$

$$z_y = \left[2 - 2y \cdot (x+2y-2)\right] \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2-y^2}.$$

Ad. (3) Znajdujemy punkty stacjonarne:

$$\begin{cases} z_x = 0 \\ z_y = 0 \end{cases};$$

w obu pochodnych cząstkowych występuje wyrażenie

$e^{-\frac{1}{2}x^2-y^2} > 0$, zatem układem równoważnym jest:

$$\begin{cases} 1-x\cdot(x+2y-2)=0 \\ 2-2y\cdot(x+2y-2)=0 \end{cases},$$

a po wymnożeniu i uporządkowaniu:

$$\begin{cases} x\cdot(x+2y-2)=1 \\ 2y\cdot(x+2y-2)=2 \end{cases};$$

ponieważ wyrażenie w nawiasie nie może być równe zero (dlaczego?), możemy oba równania podzielić stronami przez siebie, otrzymując rozwiązanie: $x = y$. Otrzymany wynik podstawiamy do jednego z równań układu, np. pierwszego, i wówczas:

$$3y^2-2y-1=0 \quad \text{i dalej} \quad y_1=-\frac{1}{3} \quad y_2=1$$

oraz odpowiednio

$$x_1=-\frac{1}{3} \quad x_2=1.$$

Mamy więc dwa punkty stacjonarne $P_1(-1/3,-1/3)$, $P_2(1,1)$. Uwzględniając uwagę z punktu (1), odrzucamy punkt P_1.

Ad. (4) Wyliczamy pochodne cząstkowe drugiego rzędu:

$$z_{xx}\Big|_{P_2} = \left\{\left[-1\cdot(x+2y-2)-x\cdot 1\right]\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2-y^2} + \left[1-x\cdot(x+2y-2)\right]\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2-y^2}\cdot(-x)\right\}\Big|_{P_2} =$$

$$= -2\cdot e^{-\frac{3}{2}} + 0\cdot e^{-\frac{3}{2}} = -2\cdot e^{-\frac{3}{2}},$$

$$z_{yy}\Big|_{P_2} = \left\{\left[-2\cdot(x+2y-2)-2y\cdot 2\right]\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2-y^2} + \left[2-2y\cdot(x+2y-2)\right]\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2-y^2}\cdot(-2y)\right\}\Big|_{P_2} =$$

$$= -6\cdot e^{-\frac{3}{2}} + 0\cdot e^{-\frac{3}{2}} = -6\cdot e^{-\frac{3}{2}},$$

$$z_{yx}\Big|_{P_2} = \left\{\left[-x\cdot 2\right]\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2-y^2} + \left[1-x\cdot(x+2y-2)\right]\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2-y^2}\cdot(-2y)\right\}\Big|_{P_2} =$$

$$= -2\cdot e^{-\frac{3}{2}} + 0\cdot e^{-\frac{3}{2}} = -2\cdot e^{-\frac{3}{2}}.$$

Teraz obliczamy wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} -2\cdot e^{-\frac{3}{2}} & -2\cdot e^{-\frac{3}{2}} \\ -2\cdot e^{-\frac{3}{2}} & -6\cdot e^{-\frac{3}{2}} \end{vmatrix} = 8\cdot e^{-\frac{3}{2}} > 0 .$$

Zatem funkcja osiąga ekstremum w punkcie P_2; ponieważ $z_{xx}\Big|_{P_2} < 0$, jest to maksimum.

Ad. (5) ***Odpowiedź***: Wartość maksymalna funkcji jest równa

$$z_{(1,1)} = 1\cdot e^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e^3}} \approx 0{,}223 .$$

Maksymalny zysk względny jest równy 0,223, co oznacza, że maksymalny zysk względny procentowy jest równy 22,3%.

Zadania

Zadanie *5.z.5.* Znaleźć wartości ekstremalne funkcji $z = f(x,y)$:

a) $z = 2x^2 + y^2 - xy - 3x - y$; b) $z = x^2 + 2y^2 + xy - 3x - 5y$;

c) $z = x^2 + 2y^2 - xy - x - 3y$; d) $z = -x^2 - 3y^2 + 2xy + 4y$;

e) $z = x^2 + y^2 - 5xy + 4x + 4y$; f) $z = \frac{1}{3}\cdot x^3 + \frac{1}{2}\cdot y^2 + xy - 2x - 2y$;

g) $z = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 - xy$; h) $z = x^2 + y^3 - xy - x - 2y + 1$;

i) $z = x^3 + y^2 - 4xy + x + 2y + 1$; j) $z = \ln(9 - x^2 - y^2)$;

k) $z = x\cdot e^{x+y^2}$; l) $z = x\cdot y - \frac{2}{x} - \frac{4}{y} + 8$; m) $z = e^{x^2+2y^2}$.

Odpowiedzi

a) $z(1,1)_{\min} = -2$; b) $z(1,1)_{\min} = -4$; c) $z(1,1)_{\min} = -2$; d) $z(1,1)_{\max} = 2$;

e) brak ekstremów; f) $z(1,1)_{\min} = -\frac{13}{6}$; g) $z(1,1)_{\min} = -\frac{1}{3}$; h) $z(1,1)_{\min} = -1$;

i) $z\left(\frac{5}{3},\frac{7}{3}\right)_{\min} = -\frac{8}{9}$; j) $z(0,0)_{\max} = \ln 9$; k) brak ekstremów; l) $z(-1,-2)_{\min} = 14$;

m) $z(0,0)_{\min} = 1$.

6. Szeregi

6.1. Szeregi liczbowe

6.1.1. Wiadomości podstawowe

Przypomnienie wiadomości dotyczących ciągów liczbowych

Funkcję, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych, nazywamy ciągiem liczbowym i zapisujemy $a_n = f(n)$. Na przykład:

$$a_n = \frac{1}{n}\ ,\ b_n = \sqrt{n^2+n}\ - n\ ,\ c_n = \frac{n!}{2^n}.$$

$$a_4 = \frac{1}{4}\ ,\ b_3 = \sqrt{12} - 3 = 2\sqrt{3} - 3,\ c_2 = \frac{2!}{2^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Uwaga *6.u.1*. Wyraz a_4 oznacza czwarty wyraz (czwartą liczbę) ciągu (a_n), a odpowiednio b_3 oraz c_2 oznaczają odpowiednio trzeci i drugi wyraz ciągu (b_n) oraz (c_n).

Granica właściwa ciągu

Definicja *6.d.1*. Liczbę *g* nazywamy granicą ciągu (a_n), jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba *K* zależna od ε i taka, że dla każdego $n > K$ zachodzi nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$.

Granica niewłaściwa ciągu

Definicja *6.d.2.*

a) Liczbę $+\infty$ nazywamy granicą ciągu (a_n), jeżeli dla każdego $A > 0$ istnieje liczba skończona $K \in N$ zależna od *A* i taka, że dla każdego $n > K$ zachodzi nierówność $a_n > A$.

b) Liczbę $-\infty$ nazywamy granicą ciągu (a_n), jeżeli dla każdego $B < 0$ istnieje liczba skończona $K \in N$ zależna od *B* i taka, że dla każdego $n > K$ zachodzi nierówność $a_n < B$.

Granicę ciągu zapisujemy: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$.

Uwaga *6.u.2*. Gdy granicą ciągu jest $-\infty$ lub $+\infty$, wówczas mówimy, że ma on granicę niewłaściwą, a o ciągu mówimy, że jest ***rozbieżny***.

Własności granic właściwych

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n ,$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n ,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$$

przy warunku, że lewa i prawa strona istnieje (mianownik różny od 0).

Przy wyliczaniu granic pewnego typu ciągów stosuje się wzór

(6.1) $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = e^k .$$

Przykład *6.p.1*. Obliczyć granicę ciągu

a) $a_n = \dfrac{n^2-3n+5}{n^2+n}$; b) $b_n = \left(\dfrac{2n+3}{2n-1}\right)^{5n}$; c) $c_n = \dfrac{n!+(n+1)!}{(n+1)!-n!}$.

Rozwiązania

a) $a_n = \dfrac{n^2-3n+5}{n^2+n}$.

Aby wyliczyć granicę, dzielimy licznik i mianownik (wszystkie wyrażenia sumy lub różnicy licznika i mianownika) ułamka, który określa ciąg, przez zmienną *n* podniesioną do najwyższej potęgi mianownika – w naszym przypadku przez n^2:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-3n+5}{n^2+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n}} = 1, \text{ bo}$$

$$\frac{3}{n}\to 0, \quad \frac{5}{n^2}\to 0, \quad \frac{1}{n}\to 0.$$

Odpowiedź: Granica ciągu jest równa 1.

b) $b_n = \left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^{5n}$.

W ułamku w nawiasie dzielimy licznik i mianownik przez $2n$ oraz stosujemy wzór (6.1)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^{5n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{3}{2n}}{1+\frac{-1}{2n}}\right)^{5n} = \left[\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{\frac{3}{2}}{n}}{1+\frac{\frac{-1}{2}}{n}}\right)^{n}\right]^{5} = \left(\frac{e^{\frac{3}{2}}}{e^{-\frac{1}{2}}}\right)^{5} = e^{2\cdot 5} = e^{10}.$$

Odpowiedź: Granicą ciągu jest e^{10}.

c) $c_n = \frac{n! + (n+1)!}{(n+1)! - n!}$.

Uwaga *6.u.3*.

$$n! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n \text{ oraz } (n+1)! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n\cdot (n+1) = n!(n+1).$$

Najpierw przekształcimy c_n, uwzględniając uwagę 6.u.3:

$$c_n = \frac{n!+(n+1)\cdot n!}{(n+1)\cdot n!-n!} = \frac{n!(1+n+1)}{n!(n+1-1)} = \frac{n+2}{n} = 1+\frac{2}{n}.$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} 1+\frac{2}{n} = 1+0 = 1, \quad \text{bo} \quad \frac{2}{n} \to 0.$$

Odpowiedź: Granica ciągu jest równa 1.

Zadania

Zadanie *6.z.1*. Obliczyć granice następujących ciągów liczbowych.

a) $a_n = \frac{n^2+5n-2}{3n^2-2n+6}$; b) $b_n = \frac{n-4n^2}{n^3+2}$; c) $c_n = \frac{2(n+1)!}{(n+1)!+3n!}$;

d) $d_n = \dfrac{2-(n+2)!}{3n!+4(n+1)!}$; e) $e_n = \left(\dfrac{3n-1}{3n+2}\right)^{2n}$; f) $f_n = \left(\dfrac{4n+3}{4n-7}\right)^{9n}$.

Odpowiedzi:

a) $\dfrac{1}{3}$; b) 0; c) 2; d) ∞; e) $\dfrac{1}{e^2}$; f) $e^{\frac{45}{2}}$.

6.1.2. Określenie szeregu liczbowego i jego sumy oraz zbieżność i rozbieżność szeregu

Definicja *6.d.3.* Niech będzie dany ciąg liczbowy (a_n); wówczas wyrażenie postaci: $a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ nazywamy ***szeregiem liczbowym*** i zapisujemy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definicja *6.d.4.* Liczbę

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

nazywamy ***sumą częściową szeregu liczbowego***, a granicę ciągu liczbowego (S_n) – ciągu sum częściowych, nazywamy ***sumą szeregu liczbowego*** i oznaczamy *S*; jeżeli suma istnieje i jest liczbą skończoną, to wyjściowy szereg nazywamy ***zbieżnym***, natomiast w pozostałych przypadkach (granica nie istnieje, granica jest liczbą nieskończoną) szereg nazywamy ***rozbieżnym***.

Uwaga. *6.u.4*. Na ogół wyliczenie sumy szeregu liczbowego zbieżnego jest niezmiernie trudne, jednakże można wyliczyć jej wartość przybliżoną, wyliczając sumę częściową, np. S_4, S_{14} itd. W związku z tym należy wiedzieć, czy szereg jest zbieżny, czy rozbieżny, co oznacza, że wiemy, czy można przybliżyć sumę szeregu przez sumę częściową czy nie. Szeregi liczbowe rozbieżne mają zastosowanie w szczególnych przypadkach (np. do oszacowań pewnych funkcji rozbieżnych).

Warunek konieczny zbieżności szeregu liczbowego

Twierdzenie *6.t.1*. Jeżeli nieskończony szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Uwaga *6.u.5.* Nawet jeśli wyraz ogólny szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ spełnia warunek konieczny zbieżności (tzn. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$), nie oznacza to, że szereg jest zbieżny.

Przykładem szeregu rozbieżnego spełniającego warunek konieczny zbieżności jest szereg harmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (suma odwrotności kolejnych liczb naturalnych). Do wykazania, że ciąg sum częściowych (S_n) szeregu harmonicznego jest rozbieżny, wykorzystamy fakt: *jeśli nieskończony podciąg ciągu nieskończonego jest rozbieżny, to ciąg jest rozbieżny.* Pokażemy, że ciąg (S_{2^n}), który jest podciągiem (częścią) ciągu (S_n), jest rozbieżny

$$S_{2^1} = 1+\frac{1}{2},\quad S_{2^2} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4},\quad S_{2^3} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8},...,$$

$$S_{2^n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+...+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+...+\frac{1}{2^{n-1}+1}+...+\frac{1}{2^n} =$$

$$=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+...+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}\right)+...+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+...+\frac{1}{2^n}\right)=$$

$$=1+\left(\frac{1}{2^1}\right)+\underbrace{\left(\frac{1}{2^1+1}+\frac{1}{2^2}\right)}_{>2\cdot\frac{1}{2^2}}+\underbrace{\left(\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{2^2+2}+\frac{1}{2^2+3}+\frac{1}{2^3}\right)}_{>2^2\cdot\frac{1}{2^3}}+$$

$$+\underbrace{\left(\frac{1}{2^3+1}+...+\frac{1}{2^3+7}+\frac{1}{2^4}\right)}_{>2^3\cdot\frac{1}{2^4}}+...+\underbrace{\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+...+\frac{1}{2^n}\right)}_{>2^{n-1}\cdot\frac{1}{2^n}}.$$

Zauważmy, że wyrażenie S_{2^n} zostało podzielone na sumę *n* nawiasów; w pierwszym znajduje się jeden (2^0) wyraz, w drugim dwa (2^1), w trzecim cztery (2^2), a w *n*-tym 2^{n-1} składników sumy. Co więcej – ostatnim wyrażeniem w każdej parze nawiasów jest ułamek postaci $\frac{1}{2^k}$, który jest składnikiem najmniejszym z wszystkich znajdujących się w nawiasie. Zatem liczba w każdej parze nawiasów (począwszy od drugiej) jest większa od $\frac{1}{2}$. Stąd:

$$S_{2^n} > 1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2}}_{n\ razy},\ \text{czyli}$$

$$S_{2^n} > \left(1+\frac{n}{2}\right) \to \infty, \text{ gdy } n \to \infty, \text{ więc } S_{2^n} \to \infty;$$

oznacza to, że $S_n \to \infty$, a zatem szereg harmoniczny jest rozbieżny.

6.1.3. Szeregi liczbowe o wyrazach dodatnich

Definicja *6.d.5.* Szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, dla którego $a_n > 0$ dla każdego *n* naturalnego, nazywamy szeregiem o wyrazach dodatnich.

Uwaga *6.u.6.* Dla szeregów o wyrazach dodatnich w celu skrócenia zapisu wprowadza się następujące oznaczenia:

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$ oznacza, że szereg jest ***zbieżny***,

$\sum_{n=1}^{\infty} d_n = \infty$ oznacza, że szereg jest ***rozbieżny***.

Kryteria zbieżności szeregów o wyrazach dodatnich

1. Kryterium porównawcze

   Jeżeli istnieje taka liczba skończona *K*, że dla każdego $n > K$

   $$\text{(a)} \qquad a_n \le b_n \text{ oraz } \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty, \text{ to } \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty.$$

   Jeżeli istnieje taka liczba skończona *K*, że dla każdego $n > K$

   $$\text{(b)} \qquad a_n \ge b_n \text{ oraz } \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty, \text{ to } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty.$$

2. Kryterium ilorazowe, zwane również kryterium d'Alamberta. Gdy dany jest szereg o wyrazach dodatnich

   $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ oraz } g = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}, \text{ wówczas}$$

   jeżeli $g < 1$, to dany szereg jest zbieżny,

jeżeli $g > 1$, to dany szereg jest rozbieżny,
jeżeli $g = 1$, to szereg może być zbieżny lub rozbieżny.

3. Kryterium pierwiastkowe, zwane również kryterium Cauchy'ego. Gdy dany jest szereg o wyrazach dodatnich

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ oraz } g = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}\text{, wówczas:}$$

jeżeli $g < 1$, to dany szereg jest zbieżny,
jeżeli $g > 1$, to dany szereg jest rozbieżny,
jeżeli $g = 1$, to szereg może być zbieżny lub rozbieżny.

Uwaga *6.u.7.* Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ jest zbieżny dla $\alpha>1$ oraz rozbieżny w pozostałych przypadkach.

Przykład *6.p.2.* Zbadać zbieżność szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{(n+3)^{2n}}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + n^3}{n!+5^n}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + n^2}{2n^4 + 3n^2}$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + n^n}{5^n + n!}$; f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n^2}{n^3 + 2n^2 + 4n}$.

Rozwiązania

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$.

Zastosujemy kryterium ilorazowe, wypiszemy więc:

$a_n = \frac{2^n}{n!}$ oraz $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2 \cdot 2^n}{n!\cdot(n+1)}$, gdzie: $2^{n+1} = 2^n \cdot 2$;

$(n+1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1) = n! \cdot (n+1)$.

Wyliczymy teraz:

$$g = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 2^n}{n!\cdot(n+1)} \cdot \frac{n!}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1 .$$

Oznacza to, że dany szereg jest zbieżny, co zapisujemy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} < \infty .$$

Odpowiedź: Powyższy szereg jest zbieżny.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{(n+3)^{2n}}$.

Stosujemy kryterium ilorazowe

$$a_n = \frac{(2n+1)!}{(n+3)^{2n}} \quad \text{oraz} \quad a_{n+1} = \frac{[2(n+1)+1]!}{(n+1+3)^{2(n+1)}} =$$

---

z definicji $n!$ mamy:

$(2n + 3)! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (2n + 1) \cdot (2n + 2) \cdot (2n + 3) = (2n + 1)! \cdot (2n + 2) \cdot (2n + 3)$,

więc w konsekwencji otrzymamy

$$= \frac{(2n+3)!}{(n+4)^{2n+2}} = \frac{(2n+1)!(2n+2)(2n+3)}{(n+4)^{2n}(n+4)(n+4)};$$

wyliczymy teraz g; stosując wzór (6.1):

$$g = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!(2n+2)(2n+3)}{(n+4)^{2n}(n+4)(n+4)} \cdot \frac{(n+3)^{2n}}{(2n+1)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)^{2n}}{(n+4)^{2n}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{2n+2}{n+4} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n+4} =$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{4}{n}} \right)^n \right)^2 \cdot 2 \cdot 2 = \left(\frac{e^3}{e^4} \right)^2 \cdot 2^2 = \left(\frac{2}{e} \right)^2 < 1 .$$

Wykorzystujemy znany fakt, że jeśli $a \in (0,1)$, to $a^k \in (0,1)$ dla każdego $k \in N$, szereg jest więc zbieżny, czyli

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{(n+3)^{2n}} < \infty .$$

Odpowiedź: Dany szereg jest zbieżny.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + n^3}{n!+5^n}$.

Stosujemy kryterium porównawcze (a), więc musimy znaleźć odpowiednie b_n.

$$a_n = \frac{3^n + n^3}{n!+5^n} \le \frac{3^n + 3^n}{n!} = 2 \cdot \frac{3^n}{n!} = 2b_n .$$

Przy powiększaniu ułamka stosujemy poniższą uwagę 6.u.8.

Uwaga *6.u.8*. Przy powiększaniu ułamka, którego zarówno licznik, jak i mianownik są sumami pewnych wyrażeń, stosujemy zasadę: w liczniku spośród wyrażeń, które dodajemy, wybieramy wyrażenie „największego rzędu" i wstawiamy je w miejsce każdego wyrazu sumy, a w mianowniku wybieramy wyrażenie, które jest „największego rzędu" i *tylko to* wyrażenie zostawiamy.

Przy wyborze wyrażenia „największego rzędu" kierujemy się zasadą:

$$a \cdot n^k \le b \cdot c^n \le d \cdot n! \le f \cdot n^n , \quad \text{gdzie} \quad a > 0,\ b > 0,\ d > 0,\ f > 0,\ c > 1,$$

zachodzi dla każdego $n > K$, gdzie *K* jest pewną liczbą skończoną.

Teraz do badania zbieżności szeregu, którego ogólnym wyrazem jest b_n (współczynnik 2 występujący przed b_n nie wpływa na zbieżność badanego szeregu, więc możemy go pominąć), stosujemy kryterium ilorazowe. W związku z tym

$$b_n = \frac{3^n}{n!}, \qquad b_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{3 \cdot 3^n}{n! \cdot (n+1)},$$

gdzie jak w jednym z poprzednio rozwiązywanych zadań

$(n + 1)! = n!\,(n + 1)$, oraz $3^{n+1} = 3^n \cdot 3$.

$$g = \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot 3^n}{n!\cdot(n+1)} \cdot \frac{n!}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0 < 1, \text{ więc}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty,$$

czyli na podstawie kryterium porównawczego (a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + n^3}{n!+5^n} < \infty.$$

Odpowiedź: Dany szereg jest zbieżny.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + n^2}{2n^4 + 3n^2}$.

Najpierw stosujemy kryterium porównawcze (a), czyli po wykorzystaniu uwagi 6.u.8 z poprzedniego zadania mamy

$$a_n = \frac{\sqrt{n} + n^2}{2n^4 + 3n^2} \le \frac{2n^2}{2n^4} = \frac{1}{n^2} = b_n.$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny, bo wiadomo, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ jest zbieżny dla α>1 oraz rozbieżny w pozostałych przypadkach (uwaga 6.u.7).

Odpowiedź: Na podstawie kryterium porównawczego (a) stwierdzono, że dany szereg jest zbieżny.

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + n^n}{5^n + n!}$.

Najpierw stosujemy kryterium porównawcze (a) (przy powiększaniu korzystamy z uwagi 6.u.8)

$$a_n = \frac{n^3 + n^n}{5^n + n!} \le \frac{n^n + n^n}{n!} = 2 \cdot \frac{n^n}{n!} = 2b_n.$$

Teraz badamy zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$$

(współczynnik 2 występujący przed b_n nie wpływa na zbieżność badanego szeregu, więc możemy go pominąć), stosując kryterium ilorazowe (patrz przykłady (a) i (b)). Wyliczamy:

$$b_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1)\cdot n!} = \frac{(n+1)^n}{n!}, \text{ więc}$$

$$g = \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \lim_{n\leftarrow\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1.$$

Przy wyliczaniu granicy stosujemy wzór (6.1), mamy więc szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$, tzn. że jest rozbieżny, zatem kryterium porównawcze (a) nie wyjaśnia problemu zbieżności wyjściowego szeregu. Zastosujemy więc kryterium porównawcze (b), wykorzystując przy zmniejszaniu podaną niżej uwagę 6.u.9.

Uwaga *6.u.9*. Przy zmniejszaniu ułamka, którego zarówno licznik, jak i mianownik są sumami pewnych wyrażeń, stosujemy zasadę: w liczniku wybieramy wyrażenie, które jest „największego rzędu", i *tylko to* wyrażenie zostawiamy, a w mianowniku spośród wyrażeń, które dodajemy, wybieramy wyrażenie „największego rzędu" i wstawiamy je w miejsce każdego wyrazu sumy.

$$a_n = \frac{n^3+n^n}{5^n+n!} \geq \frac{n^n}{n!+n!} = \frac{1}{2}\cdot\frac{n^n}{n!} = \frac{1}{2} b_n.$$

Teraz badamy zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$$

(współczynnik $\frac{1}{2}$ występujący przed b_n nie wpływa na zbieżność zapisanego szeregu, więc jak w powyższym przypadku, można go pominąć). O badanym szeregu wiemy, że jest rozbieżny (patrz: pierwsza część zadania, gdzie stosowaliśmy kryterium porównawcze (a)). Oznacza to, że na podstawie kryterium porównawczego (b) dany szereg jest rozbieżny.

Odpowiedź: Dany szereg jest rozbieżny.

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n^2}{n^3 + 2n^2 + 4n}$.

Stosujemy najpierw kryterium porównawcze (a)

$$a_n = \frac{2^n + n^2}{n^3 + 2n^2 + 4n} \le \frac{2^n + 2^n}{n^3} = 2\ \frac{2^n}{n^3} = 2\ b_n\ .$$

Przy zwiększaniu ułamka wykorzystujemy uwagę 6.u.8. Badamy teraz zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3}$ (współczynnik 2 jak w zadaniu (e) nie wpływa na zbieżność badanego szeregu, więc może być pominięty przy jego badaniu) przez zastosowanie kryterium ilorazowego; wyliczamy więc

$$b_{n+1} = \frac{2 \cdot 2^n}{(n+1)^3}$$

oraz granicę

$$g = \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 2^n}{(n+1)^3} \cdot \frac{n^3}{2^n} = \lim_{n\leftarrow\infty} 2 \left(\frac{n}{n+1} \right)^3 = 2 > 1,$$

czyli szereg utworzony z b_n jest rozbieżny. Oznacza to, że kryterium porównawcze (a) nie określa zbieżności ani rozbieżności szeregu wyjściowego; zastosujemy więc kryterium porównawcze (b).

$$a_n = \frac{2^n + n^2}{n^3 + 2n^2 + 4n} \ge \frac{2^n}{n^3 + n^3 + n^3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2^n}{n^3} = \frac{1}{3} \cdot b_n .$$

Przy zmniejszaniu ułamka wykorzystujemy uwagę 6.u.9. Badamy teraz zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n^3}$$

(podobnie wartość $\frac{1}{3}$ jak poprzednio 2 czy $\frac{1}{2}$ nie wpływa na zbieżność zapisanego szeregu, więc może być pominięta), który, jak już zbadaliśmy, jest rozbieżny. Oznacza to, że dany szereg na podstawie kryterium porównawczego (b) jest rozbieżny.

Odpowiedź: Powyższy szereg jest rozbieżny.

Zadania

Zadanie *6.z.2.* Zbadać zbieżność następujących szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+n^2}{5^n+4^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n+5}{3n^4+7}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+n}{2^n+(2n)^n}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2n}}{(2n)!}$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+n^3}{n!+3^n}$; f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+n!}{3^n+n^n}$; g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n^3}{3^n+n!}$; h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!+2^n}{5^n+n^4}$;

i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+n}{n!+4^n}$; j) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+n!}{n^4+n^n}$; k) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3^n}{5^n+n^5}$; l) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+4^n}{5^n+8^n}$.

Odpowiedzi:

a) zbieżny, b) zbieżny, c) zbieżny, d) rozbieżny, e) zbieżny, f) zbieżny, g) zbieżny, h) rozbieżny, i) zbieżny, j) zbieżny, k) zbieżny, l) zbieżny.

6.1.4. Szeregi liczbowe naprzemienne

Definicja *6.d.6*. Szereg liczbowy postaci

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \text{, gdy dla każdego } n\in N: a_n>0$$

nazywamy szeregiem naprzemiennym. Na przykład:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}\pm\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}.$$

$$(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}=(-1)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n}).$$

Zapisany w przykładzie szereg nazywa się ***anharmonicznym***.

Dla szeregów *naprzemiennych* ***kryterium zbieżności***, zwane kryterium Leibniza, jest następujące.

Twierdzenie *6.t.2* (***kryterium Leibniza***). Jeżeli ciąg (a_n) jest ciągiem wyrazów dodatnich monotonicznie malejących (każda liczba następna ciągu jest mniejsza od poprzedniej) oraz jego granica jest równa zero, to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$$

jest zbieżny, a suma częściowa S_n tego szeregu spełnia nierówność:

$$|S_n - S| < a_{n+1}, \tag{6.2}$$

gdzie *S* jest sumą danego szeregu naprzemiennego.

Ze względu na to, że wyrażenie $|S_n - S|$ określa *błąd*, jaki popełniamy, zastępując sumę szeregu *S* sumą częściową S_n, mówimy, że (6.2) „*szacuje*" błąd przy wyliczaniu sumy częściowej.

Przykład *6.p.3.*

a) Zbadać zbieżność oraz w przypadku zbieżności wyliczyć S_4 i błąd, jaki popełniamy, zastępując otrzymanym wynikiem sumę szeregu *S* dla

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^3+1}.$$

b) Obliczyć, ile należy dodać wyrazów szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{10^n},$$

aby otrzymany wynik przybliżał jego sumę z dokładnością, która jest liczbą mniejszą od 0,0001.

c) Zbadać zbieżność i wyliczyć, jaka suma częściowa szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{(n+1)!}$$

różni się od jego sumy mniej niż o 10^{-4}.

Rozwiązania

a) Zbadać zbieżność oraz w przypadku zbieżności wyliczyć S_4 i błąd, jaki popełniamy, zastępując otrzymanym wynikiem sumę szeregu *S* dla

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^3+1}.$$

(1) Sprawdzamy, czy ciąg $a_n = \frac{n}{n^3+1}$ jest malejący.

(2) Wyliczamy $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^3+1}$.

Ad. (1) Sprawdzamy, czy zachodzi $a_{n+1} - a_n < 0$ (bo ciąg ma być malejący) dla każdego *n* naturalnego, więc wyliczamy

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)^3+1} = \frac{n+1}{n^3+3n^2+3n+1+1} = \frac{n+1}{n^3+3n^2+3n+2}$$

i po podstawieniu liczymy:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n^3+3n^2+3n+2} - \frac{n}{n^3+1} = \frac{-2n^3-3n^2-n+1}{(n^3+3n^2+3n+2)(n^3+1)} < 0.$$

Zapisana nierówność zachodzi dla każdego *n* naturalnego, więc ciąg a_n jest malejący.

Ad. (2) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^3+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^3}} = \frac{0}{1} = 0$.

Na podstawie (1) oraz (2), zgodnie z kryterium Leibniza, stwierdzamy, że dany szereg jest zbieżny.

Wyliczymy teraz:

$$S_4 = \frac{1}{2} - \frac{2}{9} + \frac{3}{28} - \frac{4}{65} \approx 0{,}12338\,,\quad a_5 = \frac{5}{126} \approx 0{,}03968\,.$$

Odpowiedź: $S_4 \approx 0{,}12338$ i różni się od sumy szeregu *S* o mniej niż 0,03968.

b) Obliczyć, ile należy dodać wyrazów szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{10^n}$, aby otrzymany wynik przybliżał jego sumę z dokładnością, która jest liczbą mniejszą od 0,0001.

Sprawdzimy najpierw, czy dany szereg jest zbieżny. Szereg jest naprzemienny, więc zastosujemy kryterium Leibniza.

1. Monotoniczność $a_n = \frac{n}{10^n}$, $a_{n+1} = \frac{n+1}{10^{n+1}}$, ponieważ $a_n > 0$ dla każdego $n \in N$, więc aby zbadać, czy ciąg jest malejący, wystarczy sprawdzić, czy zachodzi

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$

(bo ciąg ma być malejący) dla każdego $n \in N$;

$$\frac{n+1}{10\cdot 10^n}\cdot\frac{10^n}{n}=\frac{n+1}{10n}<1$$

zachodzi dla każdego *n* naturalnego, czyli ciąg jest malejący.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{10^n}\overset{H}{=}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{10^n\ln 10}=0$

(przy wyliczaniu granicy zastosowano regułę de l'Hospitala).

3. Aby wyliczyć, ile wyrazów należy dodać, musimy najpierw wyliczyć, dla jakiego *n* a_{n+1} będzie nie mniejsze od 0,0001.

$a_{n+1}=\frac{n+1}{10^{n+1}}\geq 0{,}0001$ (nierówność zachodzi dla *n* = 4, 5, 6, ...).

Odpowiedź: Należy dodać przynajmniej cztery wyrazy tego szeregu.

c) Zbadać zbieżność i wyliczyć, jaka suma częściowa szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{(n+1)!}$$

różni się od jego sumy o mniej niż 10^{-4}.

Zaczynamy od badania zbieżności.

1. Monotoniczność

$$a_n=\frac{n}{(n+1)!},\quad a_{n+1}=\frac{n+1}{(n+2)!}=\frac{n+1}{(n+2)(n+1)!},\quad \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+1}{n(n+2)}<1,$$

więc ciąg jest malejący.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)!}=0$, szereg jest więc zbieżny.

3. $|S_n-S|<a_{n+1}$, wyliczamy zatem, dla jakiego *n* $a_{n+1}\geq 10^{-4}=0{,}0001$.

$a_{n+1}=\frac{n+1}{(n+2)!}\geq 0{,}0001$ (nierówność zachodzi dla *n* = 6, 7, 8, ...).

Odpowiedź: S_6, S_7, S_8, ... spełnia podany w zadaniu warunek.

Zadania

***Zadanie** 6.z.3.*

a) Zbadać zbieżność oraz w przypadku zbieżności wyliczyć S_4 i błąd, jaki popełniamy, zastępując otrzymanym wynikiem sumę szeregu *S* dla

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3n}{4^n}.$$

b) Zbadać zbieżność oraz w przypadku zbieżności wyliczyć S_5 i błąd, jaki popełniamy, zastępując otrzymanym wynikiem sumę szeregu *S* dla

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3n+2}{n^2+1}.$$

c) Zbadać zbieżność oraz w przypadku zbieżności wyliczyć S_6 i błąd, jaki popełniamy, zastępując otrzymanym wynikiem sumę szeregu *S* dla

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{2^n}{n!}.$$

d) Obliczyć, ile należy dodać wyrazów szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{5^n},$$

aby otrzymany wynik przybliżał jego sumę z dokładnością, która jest liczbą mniejszą od 0,001.

e) Zbadać zbieżność i wyliczyć, jaka suma częściowa szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+3}{n!}$$

różni się od jego sumy o mniej niż 10^{-3}.

Odpowiedzi:

a) Szereg zbieżny, $S_4 \approx 0{,}4688$, błąd jest mniejszy od 0,0146.
b) Szereg zbieżny, $S_5 \approx 1{,}83$, błąd jest mniejszy od 0,54.
c) Szereg zbieżny, $S_6 \approx -0{,}8444$, błąd jest mniejszy od 0,0254.
d) Szereg zbieżny, należy dodać przynajmniej siedem wyrazów.
e) Szereg zbieżny, należy dodać przynajmniej osiem wyrazów.

6.2. Szeregi potęgowe

Definicja *6.d.7.* Szereg postaci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-p)^n$ nazywamy ***szeregiem potęgowym uogólnionym*** o środku *p*, a gdy $p=0$, wówczas szereg ten przybiera postać $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ i nazywamy go ***szeregiem potęgowym***, gdzie (a_n) jest ciągiem liczbowym, *x* – zmienną, *p* – stałą. Na przykład:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n(n+1)} .$$

Promień zbieżności szeregu potęgowego

Definicja *6.d.8.* Liczbę *r* nazywamy ***promieniem zbieżności szeregu potęgowego***, jeżeli dla każdego $k \in (-r, r)$ szereg liczbowy $\sum_{n=0}^{\infty} \left| a_n k^n \right|$ o wyrazach dodatnich jest zbieżny, a dla każdego $q \in (-\infty, -r) \cup (r, \infty)$ szereg liczbowy $\sum_{n=0}^{\infty} \left| a_n q^n \right|$ o wyrazach dodatnich jest rozbieżny.

Definicja *6.d.9.* Liczbę *r* nazywamy ***promieniem zbieżności szeregu potęgowego uogólnionego***, jeżeli dla każdego $k \in (p-r, p+r)$ szereg liczbowy $\sum_{n=0}^{\infty} \left| a_n (k-p)^n \right|$ o wyrazach dodatnich jest zbieżny, a dla każdego $q \in (-\infty, p-r) \cup (p+r, \infty)$ szereg liczbowy $\sum_{n=0}^{\infty} \left| a_n (q-p)^n \right|$ o wyrazach dodatnich jest rozbieżny.

Sposoby wyliczania promienia zbieżności szeregu potęgowego i promienia zbieżności szeregu potęgowego uogólnionego

Do wyliczania promienia zbieżności szeregów potęgowych stosuje się następujące wzory:

(6.3) $$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$ (wzór wynika z kryterium d'Alamberta),

(6.4) $r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{a_n}\right|}$ (wzór wynika z kryterium Cauchy'ego).

Uwaga *6.u.10*. Jeśli wyliczony promień $r = 0$, to szereg potęgowy i odpowiedni szereg potęgowy uogólniony są zawsze rozbieżne, a do szeregu potęgowego możemy podstawić tylko $x = 0$ i odpowiednio do szeregu uogólnionego $x = p$, aby otrzymać liczbę a_0.

Uwaga *6.u.11*. Jeżeli wyliczony promień $r = \infty$, to szereg potęgowy i odpowiedni szereg potęgowy uogólniony są zbieżne dla każdego *x* rzeczywistego.

Przykład*.6.p.4*. Wyliczyć promień zbieżności szeregu:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$; b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$; c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n}$; d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+1}$; e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!+1}$.

Rozwiązania

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Promień zbieżności wyliczymy, stosując wzór (6.3)

$$a_n = \frac{1}{n!}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!(n+1)},$$

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n!} \cdot \frac{n!(n+1)}{1} \right| = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty.$$

Odpowiedź: Szereg jest zbieżny dla każdego *x*.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot (n+1)}$.

Promień zbieżności wyliczamy jak w zadaniu poprzednim

$$a_n = \frac{1}{n \cdot (n+1)}, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)},$$

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n \cdot (n+1)} \cdot \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{1} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n} = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{2}{n} = 1.$$

Odpowiedź: Promień zbieżności $r = 1$.

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \cdot n}$.

Promień zbieżności wyliczamy, stosując wzór (6.4)

$$a_n = \frac{1}{n \cdot 2^n}, \quad r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| n \cdot 2^n \right|} = \lim_{n\to\infty} 2 \cdot \sqrt[n]{n} = 2 .$$

***Uwaga** 6.u.12.* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Odpowiedź: Promień zbieżności $r = 2$.

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 + 1}$.

Stosujemy wzór (6.3)

$$a_n = \frac{1}{n^2+1}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2+1} = \frac{1}{n^2+2n+2},$$

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n^2+1} \cdot \frac{n^2+2n+2}{1} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+2}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = 1 .$$

Odpowiedź: Promień zbieżności $r = 1$.

e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!+1}$.

Stosujemy również wzór (6.3)

$$a_n = \frac{1}{n!+1}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!+1},$$

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n!+1} \cdot \frac{(n+1)!+1}{1} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!+1}{n!+1} \cdot \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\leftarrow\infty} \frac{n+1+\frac{1}{n!}}{1+\frac{1}{n!}} = \infty,$$

bo $(n + 1)! = (n + 1) \cdot n!$

Odpowiedź: $r = \infty$.

Zadania

***Zadanie** 6.z.4.* Wyliczyć promień zbieżności szeregu potęgowego:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!+8}$; b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n(n+5)}$; c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n+4}$; d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+2n+1}$;

e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3n!+n}$; f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n+n!}$; g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n+3)!}$; h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n+3^n}$;

i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+4^n}$; j) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!+\sqrt{n}}$.

Odpowiedzi

a) $r=\infty$; b) $r=3$; c) $r=2$; d) $r=1$; e) $r=\infty$; f) $r=\infty$; g) $r=\infty$;

h) $r=3$; i) $r=4$; j) $r=\infty$.

W s k a z ó w k a: Przy wyliczaniu promienia zbieżności szeregu potęgowego w zadaniach (a), (c), (e), (f), (h), (i), (j), obliczając granicę, dzielimy licznik i mianownik powstałych ułamków przez wyrażenie „najwyższego rzędu" mianownika (uwaga 6.u.8).

6.3. Szereg Taylora

***Definicja** 6.d.10*. Z każdą funkcją $y=f(x)$, która ma pochodne dowolnego rzędu, można związać szereg potęgowy uogólniony, który zapisujemy następująco:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(p)}{n!} \cdot (x-p)^n =$$

$$= \frac{f(p)}{0!} + \frac{f'(p)}{1!} \cdot (x-p) + \frac{f''(p)}{2!} \cdot (x-p)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(p)}{n!} \cdot (x-p)^n + \ldots$$

Jest on nazywany ***szeregiem Taylora*** tej funkcji. ($f^{(n)}(p)$ oznacza pochodną rzędu n funkcji $f(x)$ w punkcie $x = p$; dla $n = 0$ pochodna jest rzędu 0, czyli jest funkcją wyjściową, 0! = 1).

Uwaga *6.u.13.* Równość między daną funkcją a związanym z nią szeregiem zachodzi dla $x \in (p-r, p+r)$, gdzie r jest promieniem zbieżności wyliczonego szeregu.

Mamy więc

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(p)}{n!} \cdot (x-p)^n \quad \text{dla} \quad x \in (p-r, p+r).$$

Proces wyliczania dla danej funkcji szeregu Taylora często nazywamy ***rozwijaniem*** funkcji w szereg Taylora (dla $p = 0$ wyliczony szereg nazywamy szeregiem Maclaurina).

Przykład *6.p.5.* Rozwinąć w szereg Taylora lub – odpowiednio – Maclaurina następujące funkcje:

a) $y = \ln x$ dla $p = 1$; b) $y = e^x$ dla $p = 0$; c) $y = \sin x$ dla $p = 0$;

d) $y = \cos x$ dla $p = 0$; e) $y = xe^{2x}$ dla $p = 0$; f) $y = \sin x + \cos x$ dla $p = 0$

oraz wyliczyć odpowiednie promienie zbieżności dla wyliczonych szeregów.

Rozwiązania

a) $y = \ln x$ dla $p = 1$.

Wyliczamy kolejne pochodne danej funkcji, a potem te pochodne dla $p = 1$:

$f(x) = \ln x$, $\qquad f(1) = \ln 1 = 0$,

$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$, $\qquad f'(1) = 1 = 0!$,

$f''(x) = -1x^{-2}$, $\qquad f''(1) = -1 = -1!$,

$f'''(x) = -1(-2)x^{-3}$, $\qquad f'''(1) = 2!$,

$f^{(IV)}(x) = -1(-2)(-3)x^{-4}$, $\qquad f^{(IV)}(1) = -3!$,

---

$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$, $\qquad f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}(n-1)!$.

Otrzymujemy szereg:

$$\frac{0}{0!} + \frac{0!}{1!}(x-1) + \frac{-1!}{2!}(x-1)^2 + \frac{2!}{3!}(x-1)^3 + \frac{-3!}{4!}(x-1)^4 + \ldots$$

$$+\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}(x-1)^n+\ldots=$$

$$=0+\frac{1}{1}\cdot(x-1)+\frac{-1}{2}\cdot(x-1)^2+\frac{1}{3}\cdot(x-1)^3+\frac{-1}{4}\cdot(x-1)^4+$$

$$\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot(x-1)^n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot(x-1)^n.$$

Wyliczamy teraz promień zbieżności otrzymanego szeregu, stosując wzór (6.3)

$a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $a_{n+1}=\frac{(-1)^n}{n+1}$, więc

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\frac{n+1}{(-1)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1}=1.$$

Odpowiedź: Mamy $\ln x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot(x-1)^n$ dla $x\in(0,2)$.

b) $y=e^x$ dla $p=0$.

Z własności pochodnej funkcji e^x wiemy, że $f^{(n)}(x)=e^x$, czyli $f^{(n)}(0)=1$. Otrzymujemy więc szereg:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

Promieniem zbieżności otrzymanego szeregu jest $r=\infty$ (patrz przykład 6.p.4a dotyczący wyliczania promienia zbieżności szeregów potęgowych).

Odpowiedź: Oznacza to, że $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ dla każdego x rzeczywistego.

c) $y=\sin x$ dla $p=0$.

$f(x)=\sin x$, $f(0)=0$,
$f'(x)=\cos x$, $f(0)=1$,
$f''(x)=-\sin x$, $f''(0)=0$,
$f'''(x)=-\cos x$, $f'''(0)=-1$,
$f^{IV}(x)=\sin x$, $f^{IV}(0)=0$.

Z otrzymanych rezultatów wnioskujemy, że następne pochodne będą dawały wyniki powtarzające się cyklicznie, otrzymujemy więc szereg

$$0+\frac{1}{1!}x+\frac{0}{2!}x^2+\frac{-1}{3!}x^3+\frac{0}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+\ldots=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

Promieniem zbieżności otrzymanego szeregu jest $r=\infty$ (wyjaśnienie w przykładzie 6.p.5f).

Odpowiedź: $\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ dla każdego *x* rzeczywistego.

d) $y=\cos x$ dla $p=0$.

$$\begin{aligned}
&f(x)=\cos x, && f(0)=1,\\
&f'(x)=-\sin x, && f'(0)=0,\\
&f''(x)=-\cos x, && f''(0)=-1,\\
&f'''(x)=\sin x, && f'''(0)=0,\\
&f^{IV}(x)=\cos x, && f^{IV}(0)=1.
\end{aligned}$$

Podobnie jak w zadaniu poprzednim, otrzymywane wyniki pochodnych kolejnych rzędów będą się powtarzać cyklicznie; otrzymujemy więc szereg

$$\frac{1}{0!}+\frac{0}{1!}x+\frac{-1}{2!}x^2+\frac{0}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\ldots=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Promieniem zbieżności otrzymanego szeregu jest, jak w poprzednim zadaniu, $r=\infty$ (wyjaśnienie w przykładzie 6.p.5f).

Odpowiedź: $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ dla każdego *x* rzeczywistego.

e) $y=xe^{2x}$ dla $p=0$.

$$\begin{aligned}
&f(x)=xe^{2x}, && f(0)=0,\\
&f'(x)=1e^{2x}+xe^{2x}\cdot 2=(1+2x)e^{2x}, && f'(0)=1,\\
&f''(x)=2e^{2x}+(1+2x)e^{2x}\cdot 2=2\cdot(2+2x)e^{2x}, && f''(0)=4,\\
&f'''(x)=(12+8x)e^{2x}=2^2\cdot(3+2x)\cdot e^{2x}, && f'''(0)=12,\\
&f^{IV}(x)=(32+16x)e^{2x}=2^3\cdot(4+2x)\cdot e^{2x}, && f^{IV}(0)=32,\\
&f^{(n)}=2^{n-1}\cdot(n+2x)\cdot e^{2x}, && f^{(n)}(0)=2^{n-1}\cdot n.
\end{aligned}$$

Zapisujemy odpowiedni szereg

$$0+\frac{1}{1!}x+\frac{4}{2!}x^2+\frac{12}{3!}x^3+\frac{32}{4!}x^4+\ldots=\frac{2^0}{0!}x+\frac{2^1}{1!}x^2+\frac{2^2}{2!}x^3+\frac{2^3}{3!}x^4+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}x^n.$$

i wyliczamy promień zbieżności otrzymanego szeregu, stosując wzór (6.3)

$$a_n=\frac{2^{n-1}}{(n-1)!},\qquad a_{n+1}=\frac{2^n}{n!},$$

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\frac{n!}{2^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}=\infty.$$

Promień zbieżności jest równy $r=\infty$.

Odpowiedź: $xe^{2x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}x^n$ zachodzi dla każdego x rzeczywistego.

f) $y=\sin x+\cos x$ dla $p=0$.

$$\begin{aligned}
&f(x)=\sin x+\cos x, && f(0)=1,\\
&f'(x)=\cos x-\sin x, && f'(0)=1,\\
&f''(x)=-\sin x-\cos x, && f''(0)=-1,\\
&f'''(x)=-\cos x+\sin x, && f'''(0)=-1,\\
&f^{IV}(x)=\sin x+\cos x, && f(0)=1.
\end{aligned}$$

Wyliczone wartości kolejnych pochodnych powtarzają się cyklicznie, więc otrzymujemy szereg

$$1+\frac{1}{1!}x+\frac{-1}{2!}x^2+\frac{-1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\ldots$$

$$=1+\frac{-1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\frac{-1}{6!}x^6+\ldots+\frac{1}{1!}x+\frac{-1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\frac{-1}{7!}x^7+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

Wyliczony szereg dla ułatwienia zapisano jako sumę dwóch szeregów wyliczonych wyżej, jednakże można go zapisać jednym wzorem:

$$1+\frac{1}{1!}x+\frac{-1}{2!}x^2+\frac{-1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{x^n}{n!},$$

gdzie symbol [a] użyty w wykładniku potęgi oznacza ***cechę*** liczby a, czyli największą liczbę całkowitą nie większą od a (np. [2] = 2; [2,1] = 2; [1,9] = 1;

[–1] = –1; [–1,7] = –2; [3,141] = 3). Promień zbieżności wyliczymy dla tak właśnie zapisanego szeregu, $|a_n| = \frac{1}{n!}$, więc przy wyliczaniu promienia zbieżności wykorzystamy wynik zadania 6.p.4a)

$$r = \lim_{x\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \infty .$$

Oznacza to, że również obydwa szeregi (występujące w przykładach 6.p.5.c i d), z których nasz szereg się składa, muszą mieć promień zbieżności równy nieskończoności.

Odpowiedź: $\sin x + \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ dla każdego x lub $\sin x + \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{x^n}{n!}$ dla każdego x rzeczywistego.

Zadania

Zadanie *6.z.5.* Rozwinąć w szereg Maclaurina następujące funkcje:

a) $y = x \cdot \sin x$ dla $p = 0$; b) $y = 3x \cdot e^x$ dla $p = 0$;

c) $y = -3x \cdot e^{2x}$ dla $p = 0$; d) $y = x \cdot e^{-3x}$ dla $p = 0$;

e) $y = -2x \cdot e^{-x}$ dla $p = 0$; f) $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ dla $p = 0$

oraz wyliczyć promienie zbieżności wyznaczonych szeregów.

Odpowiedzi:

a) $x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $r = \infty$; b) $3x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $r = \infty$;

c) $-3x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \cdot x^n$, $r = \infty$; d) $x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n!} \cdot x^n$, $r = \infty$;

e) $-2x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot x^n$, $r = \infty$; f) $x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-x^2\right)^n$, $r = 1$.

6.4. Rozwijanie w szereg Maclaurina pewnych typów funkcji wymiernych

Dla przypomnienia (patrz całki) funkcję, którą zapisujemy w postaci ułamka o liczniku i mianowniku wielomianowym, nazywamy ***funkcją wymierną***. Rozróżniamy dwa rodzaje funkcji wymiernych: ***właściwą*** i ***niewłaściwą***, podobnie jak ułamki liczbowe. Funkcję wymierną nazywamy *właściwą*, jeżeli stopień wielomianu licznika jest mniejszy od stopnia wielomianu z mianownika, podobnie funkcję wymierną nazywamy *niewłaściwą*, jeżeli stopień wielomianu licznika jest większy od stopnia wielomianu mianownika lub mu równy. Na przykład:

$\frac{3x^2+2x-10}{x^3-5x-7}$, $\frac{7}{5x^2+6}$, $\frac{-2x+3}{x^4+3x^3-9}$ to funkcje wymierne właściwe;

$\frac{x^5}{x^2-3x+5}$, $\frac{2x^3-2x^2+x-3}{5x+8}$, $\frac{x^3-5x+3}{x^3+3x-4}$ to funkcje wymierne niewłaściwe.

Każdą funkcję wymierną niewłaściwą można przedstawić jako sumę części całkowitej i funkcji wymiernej właściwej, tzn.

$$\frac{W_n(x)}{V_m(x)} = P(x) + \frac{R(x)}{V_m(x)}, \tag{6.5}$$

gdzie: $W_n(x)$ – wielomian stopnia n, $V_m(x)$ – wielomian stopnia m $(n \geq m)$, $P(x)$ – wynik dzielenia licznika wyjściowej funkcji wymiernej przez jej mianownik, $R(x)$ – reszta z opisanego wyżej dzielenia stopnia mniejszego od m, $P(x)$ – część całkowita wyjściowej funkcji, $\frac{R(x)}{V_m(x)}$ – funkcja wymierna właściwa.

Każdą funkcję wymierną właściwą można w sposób jednoznaczny przedstawić jako sumę ułamków prostych. Sposób wyliczania podano w rozdziale 4 (patrz całka nieoznaczona). Nas będą interesowały tylko pewne ułamki proste, postaci:

$$\frac{Ax+B}{a+bx^2}, \quad \frac{C}{d+ex}, \tag{6.6}$$

gdzie $a \cdot b > 0$ oraz $d \cdot e \neq 0$.

Wymienione wyżej ułamki proste po wykorzystaniu wzoru dobrze znanego ze szkoły średniej, dotyczącego sumy nieskończonego ciągu geometrycznego

$$\frac{a}{1-q} = a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots ,$$

który zachodzi dla $-1 < q < 1$, można zapisać :

$$\frac{Ax+B}{a+bx^2} = \frac{Ax}{a+bx^2} + \frac{B}{a+bx^2} = \frac{A}{a} \cdot \frac{x}{1-(-\frac{b}{a}x^2)} + \frac{B}{a} \cdot \frac{1}{1-(\frac{b}{a}x^2)} =$$

$$= \frac{A}{a} \cdot \left[x + x \cdot \left(-\tfrac{b}{a}x^2\right) + x \cdot \left(-\tfrac{b}{a}x^2\right)^2 + x \cdot \left(-\tfrac{b}{a}x^2\right)^3 + x \cdot \left(-\tfrac{b}{a}x^2\right)^4 + \dots \right] +$$

$$+ \frac{B}{a} \cdot \left[1 + \left(-\tfrac{b}{a}x^2\right) + \left(-\tfrac{b}{a}x^2\right)^2 + \left(-\tfrac{b}{a}x^2\right)^3 + \left(-\tfrac{b}{a}x^2\right)^4 + \dots \right] =$$

$$= \frac{A}{a} \cdot x \cdot \left[1 + \left(-\tfrac{b}{a}x^2\right) + \left(-\tfrac{b}{a}x^2\right)^2 + \left(-\tfrac{b}{a}x^2\right)^3 + \left(-\tfrac{b}{a}x^2\right)^4 + \dots \right] +$$

$$+ \frac{B}{a} \cdot \left[1 + \left(-\tfrac{b}{a}x^2\right) + \left(-\tfrac{b}{a}x^2\right)^2 + \left(-\tfrac{b}{a}x^2\right)^3 + \left(-\tfrac{b}{a}x^2\right)^4 + \dots \right] =$$

$$= \frac{A}{a} \cdot x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\tfrac{b}{a}x^2\right)^n + \frac{B}{a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\tfrac{b}{a}x^2\right)^n = \frac{Ax+B}{a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\tfrac{b}{a}x^2\right)^n ,$$

zatem

$$\frac{Ax+B}{a+bx^2} = \frac{Ax+B}{a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\tfrac{b}{a}x^2\right)^n \tag{6.7}$$

dla x spełniającego warunek $-1 < -\frac{b}{a} \cdot x^2 < 1$.

$$\frac{C}{d+ex} = \frac{C}{d} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{e}{d}x\right)} = \frac{C}{d} \cdot \left[1 + \left(-\tfrac{e}{d}x\right) + \left(-\tfrac{e}{d}x\right)^2 + \left(-\tfrac{e}{d}x\right)^3 + \dots \right] =$$

$$= \frac{C}{d} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\tfrac{e}{d}x\right)^n ,$$

zatem

$$\frac{C}{d+ex} = \frac{C}{d} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\tfrac{e}{d}x\right)^n \tag{6.8}$$

dla x spełniającego warunek $-1 < -\frac{e}{d} \cdot x < 1$.

Schemat rozwijania niektórych funkcji wymiernych w szereg Maclaurina:
(1) stosując wzór (6.5), daną funkcję dzielimy na sumę części całkowitej (wielomian) i funkcji wymiernej właściwej;
(2) funkcję wymierną właściwą rozkładamy na ułamki proste (patrz całki);
(3) ułamki proste rozpisujemy według wzoru (6.7) lub (6.8).

Aby można było funkcję wymierną rozwinąć w szereg Maclaurina, musi ona być takiej postaci, by ułamki proste otrzymane z rozkładu funkcji wymiernej właściwej otrzymanej z zastosowaniem wzoru (6.5) miały postać podaną w (6.6).

Przykład *6.p.6*. Rozwinąć w szereg Maclaurina następujące funkcje:

a) $\dfrac{2x^3+x^2-16x-35}{(x+2)(x-3)}$; b) $\dfrac{x^4+2x^3-3x^3+5x+3}{(x-1)(x+3)}$;

c) $\dfrac{4x^2-13}{(x^2+4)(x-5)}$; d) $\dfrac{3x^3+3x^2+x-1}{(x^2+1)(x-1)(x+2)}$.

Rozwiązania

a) $\dfrac{2x^3+x^2-16x-35}{(x+2)(x-3)}$.

Najpierw dzielimy licznik przez mianownik. Aby ułatwić dzielenie, pomnożymy wyrażenia w mianowniku.

$$(x+2)(x-3) = x^2 - x - 6$$
$$\left(2x^3+x^2-16x-35\right) : \left(x^2-x-6\right) = 2x+3$$
$$\underline{-2x^3+2x^2+12x}$$
$$3x^2-4x-35$$
$$\underline{-3x^2+3x+18}\,.$$
$$-x-17$$

Zatem, zgodnie ze wzorem (6.5),

$$\frac{2x^3+x^2-16x-35}{(x+2)(x-3)} = 2x+3+\frac{-x-17}{(x+2)(x-3)}\,.$$

Rozkładamy funkcję wymierną właściwą

$$\frac{-x-17}{(x+2)(x-3)}$$

na ułamki proste:

$$\frac{-x-17}{(x+2)(x-3)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-3} \qquad \Big/\cdot(x+2)(x-3)$$

$$-x-17=A\cdot(x-3)+B\cdot(x+2)$$

$$-x-17=(A+B)\cdot x+(-3A+2B)$$

$$\begin{cases} A+B=-1 \\ -3A+2B=-17 \end{cases}, \quad \text{zatem} \quad \begin{cases} A=3 \\ B=-4 \end{cases}.$$

Obliczyliśmy:

$$\frac{-x-17}{(x+2)(x-3)}=\frac{3}{x+2}+\frac{-4}{x-3},$$

więc zgodnie ze wzorem (6.8) otrzymane ułamki proste, dla lepszego zilustrowania, rozwiniemy w szereg w taki sposób, jak został wyprowadzony wzór (6.8). W kolejnych przykładach wzory (6.7) i (6.8) będą stosowane bezpośrednio.

$$\frac{3}{x+2}=\frac{3}{2+x}=3\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}x\right)}=\frac{3}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\tfrac{1}{2}x\right)^n=\frac{3}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}\cdot x^n$$

dla $-1<-\frac{1}{2}x<1$, a po pomnożeniu przez (–2) otrzymamy: $-2<x<2$, czyli $x\in(-2,2)$.

$$\frac{-4}{x-3}=(-4)\cdot\left(-\tfrac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{1}{3}\cdot x\right)}=\frac{4}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\tfrac{1}{3}x\right)^n=\frac{4}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}\cdot x^n$$

dla $-1<\frac{1}{3}x<1$, a po pomnożeniu przez 3 otrzymamy: $-3<x<3$, czyli $x\in(-3,3)$.

Przedziały zbieżności obu szeregów *nie są identyczne*, a ponieważ rozwinięcie funkcji w szereg składa się w istocie z dwóch szeregów, to przedział, w którym istnieje rozwinięcie funkcji, jest wspólną częścią obu przedziałów.

Odpowiedź:

$$\frac{2x^3+x^2-16x-35}{(x+2)(x-3)}=2x+3+\frac{3}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}\cdot x^n+\frac{4}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}\cdot x^n$$

dla $x \in (-2,2)$.

b) $\dfrac{x^4+2x^3-3x^3+5x+3}{(x-1)(x+3)}$.

Najpierw dzielimy licznik przez mianownik. Aby ułatwić dzielenie, pomnożymy wyrażenia w mianowniku.

$$(x-1)(x+3) = x^2+2x-3$$
$$\left(x^4+2x^3-3x^2+5x+3\right) : \left(x^2+2x-3\right) = x^2$$
$$\underline{-x^4-2x^3+3x^2}$$
$$\quad " \quad " \quad " \quad 5x+3.$$

Zatem, zgodnie ze wzorem (6.5)

$$\frac{x^4+2x^3-3x^3+5x+3}{(x-1)(x+3)} = x^2 + \frac{5x+3}{(x-1)(x+3)}.$$

Rozkładamy funkcję wymierną właściwą

$$\frac{5x+3}{(x-2)(x+3)}$$

na ułamki proste.

$$\frac{5x+3}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} \qquad \Big/ \cdot (x-1)(x+3)$$

$$5x+3 = A\cdot(x+3) + B\cdot(x-1)$$

$$5x+3 = (A+B)\cdot x + (3A-B)$$

$$\begin{cases} A+B=5 \\ 3A-B=3 \end{cases}, \quad \text{zatem} \quad \begin{cases} A=2 \\ B=3 \end{cases}.$$

Obliczyliśmy więc:

$$\frac{5x+3}{(x-1)(x+3)} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+3}, \text{ zatem}$$

$$\frac{x^4+2x^3-3x^3+5x+3}{(x-1)(x+3)} = x^2 + \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-3}.$$

Otrzymane ułamki proste rozwijamy w szereg potęgowy, stosując dwukrotnie wzór (6.8)

$$\frac{2}{x-1}=\frac{-2}{1-x}=-2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}x^n \text{ , dla } -1<x<1,$$

$$\frac{3}{x+3}=\frac{3}{3+x}=\frac{3}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\tfrac{1}{3}x\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}\cdot x^n \text{ dla } -1<\left(-\tfrac{x}{3}\right)<1 \ /\cdot(-3),$$

$$-3<x<3.$$

Sumując otrzymane rozwinięcia w szereg ułamków prostych, otrzymamy wyjściową funkcję wymierną w postaci:

$$\frac{x^4+2x^3-3x^3+5x+3}{(x-1)(x+3)}=x^2+\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+3}=x^2-2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}\cdot x^n,$$

a równość zachodzi dla części wspólnej przedziałów wypisanych wyżej, tzn. dla $x\in(-1,1)$.

Odpowiedź:

$$\frac{x^4+2x^3-3x^3+5x+3}{(x-1)(x+3)}=x^2-2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}\cdot x^n \text{ dla } x\in(-1,1).$$

c) $\dfrac{4x^2-13}{(x^2+4)(x-5)}$.

W tym przypadku stopień wielomianu licznika jest mniejszy od stopnia wielomianu z mianownika (po wymnożeniu występujących w mianowniku czynników), więc rozkładamy podaną funkcję na ułamki proste (podobnie jak w zadaniach poprzednich):

$$\frac{4x^2-13}{(x^2+4)(x-5)}=\frac{Ax+B}{x^2+4}+\frac{C}{x-5} \qquad \Big/\cdot(x^2+4)\cdot(x-5),$$

$$4x^2-13=(Ax+B)\cdot(x-5)+C\cdot(x^2+4),$$

$$4x^2-13=(A+C)\cdot x^2+(-5A+B)\cdot x+(-5B+4C),$$

$$\begin{cases} A + C = 4 \\ -5A + B = 0 \\ -5B + 4C = -13 \end{cases}, \text{ zatem } \begin{cases} A = 1 \\ B = 5 \\ C = 3 \end{cases}$$

i po podstawieniu

$$\frac{4x^2 - 13}{(x^2+4)(x-5)} = \frac{x+5}{x^2+4} + \frac{3}{x-5}.$$

Zastosujemy teraz wzory (6.7) do pierwszego ułamka oraz (6.8) do drugiego. Ze wzoru (6.7) mamy:

$$\frac{x+5}{x^2+4} = \frac{x+5}{4+x^2} = \frac{x+5}{4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x^2}{4}\right)^n \quad \text{dla} \quad -1 < -\frac{x^2}{4} < 1 \quad \Big/ \cdot(-4),$$

czyli $x \in (-2, 2)$.

Ze wzoru (6.8) otrzymamy

$$\frac{3}{x-5} = \frac{3}{-5+x} = -\frac{3}{5} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{5}\right)^n \quad \text{dla} \quad -1 < \frac{x}{5} < 1 \quad \Big/ \cdot 5, \text{ czyli } x \in (-5, 5).$$

Ostatecznie po zsumowaniu i uwzględnieniu części wspólnej przedziałów, jak w poprzednich przykładach, otrzymamy rozwiązanie.

Odpowiedź:

$$\frac{4x^2 - 13}{(x^2+4)(x-5)} = \frac{x+5}{4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x^2}{4}\right)^n - \frac{3}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{5}\right)^n \quad \text{dla } x \in (-2, 2).$$

d) $\dfrac{3x^3 + 3x^2 + x - 1}{(x^2+1)(x-1)(x+2)}$.

Również w tym przypadku stopień wielomianu licznika jest mniejszy od stopnia wielomianu z mianownika (po wymnożeniu występujących w mianowniku czynników), więc rozkładamy podaną funkcję na ułamki proste (podobnie jak w zadaniach poprzednich).

$$\frac{3x^3+3x^2+x-1}{(x^2+1)(x-1)(x+2)}=\frac{x+1}{x^2+1}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+2},$$

$$\frac{x+1}{x^2+1}=\frac{x+1}{1+x^2}=(x+1)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-x^2\right)^n \text{ dla } -1<-x^2<1, \text{ czyli } x\in(-1,1),$$

$$\frac{1}{x-1}=\frac{1}{-1+x}=-1\cdot\sum_{n=0}^{\infty}x^n \qquad \text{dla } -1<x<1, \text{ czyli } x\in(-1,1),$$

$$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n \qquad \text{dla } -1<-\frac{x}{2}<1 \;\Big|\cdot(-2), \text{ czyli } x\in(-2,2).$$

Ostatecznie po zsumowaniu i uwzględnieniu części wspólnej przedziałów, jak w poprzednich przykładach, otrzymamy rozwiązanie.

Odpowiedź:

$$\frac{3x^3+3x^2+x-1}{(x^2+1)(x-1)(x+2)}=(x+1)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-x^2\right)^n-\sum_{n=0}^{\infty}x^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n \quad \text{dla } x\in(-1,1).$$

Zadania

Zadanie 6.z.6. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcje wymierne:

a) $\dfrac{-x-17}{(x+2)\cdot(x-3)}$; b) $\dfrac{x^2-12x-15}{(x^2+3)\cdot(x-2)}$; c) $\dfrac{3x^3+12x^2+10x+5}{(x+1)\cdot(x+3)}$;

d) $\dfrac{2x^4+5x^3+15x^2+26x+18}{(x^2+5)\cdot(x+2)}$; e) $\dfrac{x^4-8x^3+16x^2-31x+49}{(x^2+2)\cdot(x-5)}$;

f) $\dfrac{3x^4+5x^3+8x^2+20x-24}{(x^2+4)\cdot(x+2)}$; g) $\dfrac{x^5-4x^4+13x^3-49x^2+34x-134}{(x^2+9)\cdot(x-4)}$.

Odpowiedzi:

a) $\frac{3}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n+\frac{4}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n,\quad x\in(-2,2);$

b) $2x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x^2}{3}\right)^n+\frac{5}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n,\quad x\in\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right);$

c) $3x+2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n-\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{3}\right)^n,\quad x\in(-1,1);$

d) $2x+1+\frac{x-1}{5}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x^2}{5}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n,\quad x\in(-2,2);$

e) $x-3+\frac{2x-5}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^n+\frac{3}{5}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{5}\right)^n,\quad x\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right);$

f) $3x-1+\frac{x-2}{4}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^n-\frac{3}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n,\quad x\in(-2,2);$

g) $x^2+4+\frac{x+2}{9}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x^2}{9}\right)^n-\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{4}\right)^n,\quad x\in(-3,3).$

6.5. Zastosowanie szeregów Taylora w aproksymacji

Wcześniej podano, że obliczenia sum szeregów liczbowych (patrz uwaga 6.u.4), a więc i szeregów Taylora, dla $x\in(p-r,p+r)$ z praktycznego punktu widzenia są trudne, a w wielu przypadkach niemożliwe. Podano wówczas, że można jednak przybliżyć sumę odpowiedniego szeregu liczbowego (a więc i szeregów Taylora dla $x\in(p-r,p+r)$) przez sumę częściową.

Uwzględniając powyższe, łatwo zauważyć, że funkcję, którą rozwija się w szereg Taylora, można dla $x\in(p-r,p+r)$ aproksymować (przybliżać) przez odpowiednią sumę częściową (wielomian). Na przykład:

$$\sin x \approx \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \qquad \text{(przykład 6.p.5c)}$$

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} \qquad \text{(przykład 6.p.5b).}$$

A teraz kilka zastosowań.

Przykład *6.p.7*. Wyliczyć przybliżone wartości całki:

a) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\, dx$; b) $\int\limits_{1}^{2} \frac{e^x}{x^2}\, dx$.

Rozwiązanie

Podanych całek nie można rozwiązać za pomocą funkcji elementarnych (patrz podrozdział 4.1), więc wyliczymy je w sposób przybliżony; w związku z tym wykorzystamy napisane wyżej przybliżenia funkcji $\sin x$ czy e^x.

$$\text{a)} \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\, dx \approx \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}}{x}\, dx = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right) dx = \left[x - \frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{600}x^5\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{18}\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - \left(\frac{\pi}{4}\right)^3\right] + \frac{1}{600}\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^5 - \left(\frac{\pi}{4}\right)^5\right] \approx 0{,}6124\,.$$

Odpowiedź: Podana całka jest w przybliżeniu równa 0,6124.

$$\text{b)} \int\limits_{1}^{2} \frac{e^x}{x^2}\, dx \approx \int\limits_{1}^{2} \frac{1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}}{x^2}\, dx =$$

$$= \int\limits_{1}^{2} x^{-2} dx + \int\limits_{1}^{2} \frac{1}{x}\, dx + \frac{1}{2}\int\limits_{1}^{2} dx + \frac{1}{6}\int\limits_{1}^{2} x\, dx + \; + \frac{1}{24}\int\limits_{1}^{2} x^2 dx + \frac{1}{120}\int\limits_{1}^{2} x^3 =$$

$$= -\left[\frac{1}{x}\right]_1^2 + \left[\ln x\right]_1^2 + \frac{1}{2}\left[x\right]_1^2 + \frac{1}{12}\left[x^2\right]_1^2 + \frac{1}{72}\left[x^3\right]_1^2 + \frac{1}{480}\left[x^4\right]_1^2 \approx 2{,}0716\,.$$

Odpowiedź: Podana całka jest w przybliżeniu równa 2,0716.

Można zauważyć, że dokładność wyliczonych całek zależy od liczby wyrazów sum częściowych, które przybliżają nam funkcje $\sin x$ czy e^x (im więcej wyrazów weźmiemy, tym dokładniejszy będzie wynik). Aby to zauważyć, wyliczymy jeszcze raz przybliżenia całki z przykładu (a) dla pięciu różnych przybliżeń funkcji $\sin x$.

Dla $\sin x \approx \frac{x}{1!} = x$ $\quad \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx \approx \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{x}\,dx = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx \approx 0{,}785398\,,$

dla $\sin x \approx \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} = x - \frac{1}{6}x^3$ $\quad \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx \approx \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x - \frac{1}{6}x^3}{x}\,dx \approx 0{,}596992\,,$

dla $\sin x \approx \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$ $\quad \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx \approx 0{,}612432\,,$

dla $\sin x \approx \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$ $\quad \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx \approx 0{,}611769\,,$

dla $\sin x \approx \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$ $\quad \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx \approx 0{,}611787\,.$

Otrzymane rezultaty świadczą o tym, że wyniki danej całki różnią się od siebie o tym mniejsze wartości, im „dłuższą" bierzemy sumę częściową. Możemy zauważyć, że podana całka wyliczona z dokładnością do czterech miejsc po przecinku jest równa 0,6118.

Podobnie postąpimy, wyliczając kolejne przybliżenia często używanej w statystyce matematycznej całki $\int\limits_{-1}^{1} e^{-x^2}\,dx$ (w rozkładzie normalnym dystrybuantą jest całka $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int\limits_{-\infty}^{a} e^{-x^2}\,dx$, ale najczęściej używa się przybliżeń $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int\limits_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx$).

Podobnie jak w przykładzie poprzednim, o dokładności przybliżenia decyduje liczba wyrazów szeregu Maclaurina (w ogólniejszym przypadku – szeregu Taylora), które zostaną scałkowane. Po obliczeniu pochodnych kolejnych rzędów (od pierwszego do dziesiątego) funkcji $f(x)=e^{-x^2}$ w punkcie $x_0=0$ uważny Czytelnik bez trudu zauważy, że wszystkie pochodne rzędu nieparzystego (1, 3, 5, 7, 9) w tym punkcie są równe 0. Autorzy podadzą zatem wyniki obliczeń tylko dla pochodnych rzędu parzystego:

$$f(0)=1,\quad f''(0)=-2,\quad f^{IV}(0)=12,\quad f^{VI}(0)=-120,$$
$$f^{VIII}(0)=1680,\quad f^{X}(0)=-30\,240.$$

Kolejne sumy częściowe szeregu Maclaurina funkcji podcałkowej są, odpowiednio, postaci:

$$n=2:\qquad 1-x^2,$$

$$n=4:\qquad 1-x^2+\frac{x^4}{2},$$

$$n=6:\qquad 1-x^2+\frac{x^4}{2}-\frac{x^6}{6},$$

$$n=8:\qquad 1-x^2+\frac{x^4}{2}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^8}{24},$$

$$n=10:\qquad 1-x^2+\frac{x^4}{2}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^8}{24}-\frac{x^{10}}{120}.$$

a odpowiadające tym sumom częściowym przybliżone wartości całek są równe

$$n=2:\qquad \int_{-1}^{1}(1-x^2)dx=\frac{4}{3}\approx 1{,}33333,$$

$$n=4:\qquad \int_{-1}^{1}(1-x^2+\frac{x^4}{2})dx=\frac{23}{15}\approx 1{,}53333,$$

$$n=6:\qquad \int_{-1}^{1}(1-x^2+\frac{x^4}{2}-\frac{x^6}{6})dx=\frac{52}{35}\approx 1{,}48571,$$

$$n=8: \qquad \int_{-1}^{1}(1-x^2+\frac{x^4}{2}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^8}{24})dx=\frac{5651}{3780}\approx 1{,}49497\,,$$

$$n=10: \qquad \int_{-1}^{1}(1-x^2+\frac{x^4}{2}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^8}{24}-\frac{x^{10}}{120})dx=\frac{31\,049}{20\,790}\approx 1{,}49345\,.$$

Analizując otrzymane przybliżenia, zauważamy, że są one, jak w poprzednim przykładzie, liczbami na przemian większymi i mniejszymi, ale mimo tej „oscylacji" stabilizują się wokół pewnej liczby. W naszym przypadku znamy tę liczbę z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku – jest to 1,49.

Aproksymowanie funkcji sumą częściową jej odpowiedniego szeregu Taylora stosuje się nie tylko w celu wyliczania całek; można tak czynić i w innych przypadkach, gdy przekształcenia danej funkcji są wyjątkowo trudne, lub wręcz niemożliwe do wykonania.

Bibliografia

1. Fichtenholz G.M., *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN 1972.
2. Foltyńska I., Ratajczak Z., Szafrański Z., *Matematyka dla studentów uczelni technicznych*, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej 1999.
3. Gruszka J., Kaczmarek L., *Matematyka. Praktyczny kurs przygotowawczy do egzaminu maturalnego*, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Komunikacji i Zarządzania 1999.
4. Matłoka M., Wojcieszyn B., *Matematyka z elementami zastosowań w ekonomii*, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Bankowej 1998.
5. Kuratowski K., *Rachunek różniczkowy i całkowy, funkcje jednej zmiennej*, PWN 1973.
6. Musielak H., Musielak J., *Analiza matematyczna*, Wydawnictwo Naukowe UAM 1993.
7. Rasiowa H., *Wstęp do matematyki współczesnej*, PWN 1973.
8. Stankiewicz W., *Zadania z matematyki dla wyższych uczelni technicznych*, Wydawnictwo Naukowe PWN 2003.
9. Wiitala S.A., *Discrete mathematics, a unified approach*, McGraw-Hill Book Company 1987.
10. Zill D.G., *Calculus with analytic geometry*, Prindle, Weber & Schmidt 1985.

Fragment recenzji napisanej przez Prof. dr. hab. Ryszarda Płuciennika:

„... uważam, że książka pt. *Elementy matematyki wyższej* autorstwa Jacka Gruszki i Lecha Kaczmarka jest pozycją niezmiernie pożyteczną, jako podstawowy podręcznik do nauczania przedmiotu Matematyka zarówno w Wyższej Szkole Komunikacji i Zarządzania, jak i na niektórych wydziałach Politechnik. Polecałbym ją dla wszystkich osób, które chciałyby poznać podstawy matematyki wyższej."

ISBN 83-88018-24-8
Wydawnictwo Wyższej Szkoły Komunikacji i Zarządzania
ul. Różana 17a, 61-577 Poznań
tel. (061) 8345 914, fax 8345 912
www.wskiz.edu
wydawnictwo@wskiz.poznan.pl